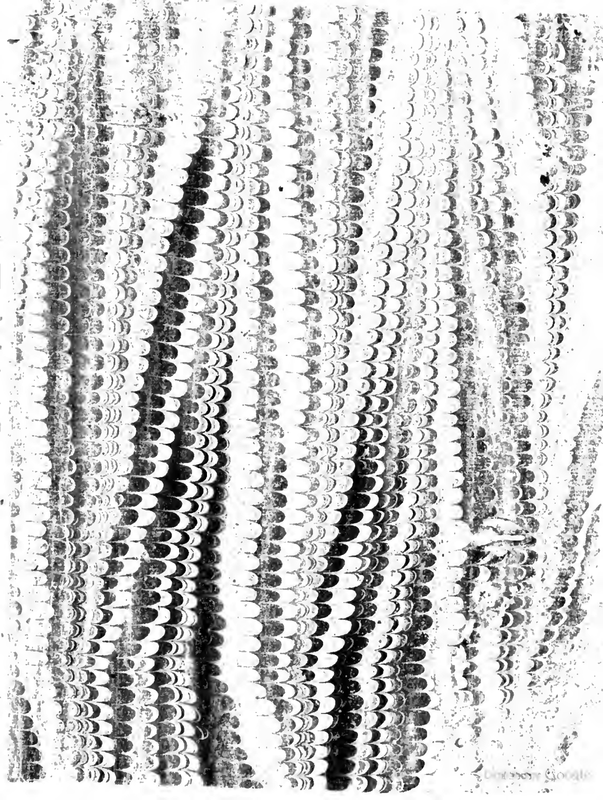



FONDO PROVINCIA


30831
BIBLIOTECA PROVINCIALE
Armadio
Palchetto
Num.° d' ordine



C'est a moi Ignace de Herlich



ELEMENS
DU
CALCUL INTEGRAL
PREMIERE PARTIE,

PAR LES PP.

LE SEUR, ET JACQUIER,

De la Société Royale de Londres, de l'Academie de Berlin, de l'Institut de Boulogne, & Correspondans de l'Academie Royale des Sciences.



A PARME,

Chez les HERITIERS MONTI,

Imprimeurs par Privilege de Son Altesse Royale.

M. DCC. LXVIII.

Avec Approbation.



A SON ALTESSE ROYALE

L'INFANT

DUC DE PARME, DE PLAISANCE, &c.



MONSEIGNEUR,

L'Ouvrage que nous avons l'honneur de presenter a VOTRE ALTESSE ROYALE, *& que nous nous proposions depuis long-*

* *

tems de mettre au jour, a èté heureusement retardé pour paroître sous les auspices d'un Prince *Auguste, qui en est le Protecteur par ses bienfaits, & qui en pourroit ètre le Juge par ses lumieres: c'est un temoignage que nous pouvons rendre avec d'autant plus de justice, qu'ayant la gloire d'avoir èté appellés auprès de* Votre *Altesse* Royale, *nous avons moins èté les Directeurs de vos Etudes, que les temoins & les admirateurs des connoissances, que vous avies déjà acquises. Nous avons cessé d'en ètre surpris, lorsque nous avons connû de près la penétration de Vòtre Genie, qui vous destinoit aux Sciences, comme Vòtre Auguste Nom vous a fait naître pour le Throne. Ces dispositions naturelles ne pouvoient manquer d'eclater bientòt, aidées par les soins de deux*

Hommes respectables, auxquels a été confié le depôt precieux de Vôtre Education. C'est à leur zele, MONSEIGNEUR, que VOUS êtes redevable de vôtre Instruction, & que vos Sujets doivent ces sentimens de douceur & d'affabilité, qui vous rendent cher non seulement a ceux qui ont l'avantage de vivre sous vos Loix; mais encore a tous les Etrangers, qui ont eû l'honneur d'être admis auprès de VOTRE PERSONNE ROTALE, & qui portent par tout la renommée de Vos rares qualités. Elevé dès vôtre plus tendre jeunesse dans les Sciences & la Litterature, guidé dans l'art du Gouvernement par un sage Ministre, qui ne s'occupe que du bonheur de Vos Peuples; etant enfin orné, comme VOUS l'êtes, de toutes les connoissances qui conviennent a la majesté d'un Souverain, & eclairé

par les Sciences exactes, qui ajoutent des forces a l'entendement; on ne peut conçevoir de Vous, Monseigneur, *que les esperances les plus glorieuses. Nous ne pouvons trop nous applaudir du delai de cet Ouvrage, puis qu'il nous fournit l'occasion de rendre public, autant qu'il est en nous, l'hommage du profond respect avec lequel nous avons l'honneur d'être,*

MONSEIGNEUR,

De Votre Altesse Royale

Les très-humbles, & très-obéïssants
Serviteurs
Les PP. le Seur, & Jacquier.

PRÉFACE.

ON a coutume d'expofer dans les Préfaces, les notions préliminaires de la matiére qu'on doit traiter. Nous n'entrerons point dans ce detail, & nous nous bornerons a préfcrire les connoîffances, que nous éxigeons dans ceux qui voudront lire ces Elemens.

Quoique nous ayons expliqué dans le prémier Chapitre les principes du Calcul différentiel, nous ne l'avons cependant fait que fuccinctement, & autant qu'il falloit pour conduire au Calcul intégral. On comprend donc qu'on doit, avant de lire cet Ouvrage, être exercé dans le Calcul différentiel, & le fçavoir manier avec facilité. Il eft par confequent encore plus neceffaire d'avoir etudié a fonds le Calcul fini, & de s'en être rendu l'ufage trés-familier. Enfin il faut que nos Lecteurs

ſoient parfaitement inſtruits dans la Géometrie Elementaire, les Sections Coniques, & qu'ils ayent une teinture de la Théorie générale des courbes; ils ne doivent pas non plus ignorer la doctrine des ſuites, entant qu'elle appartient au calcul fini. Nous ſommes perſuadés qu'avec ces ſecours, tout bon eſprit fait pour le Calcul & les Sciences, pourra par lui-même entendre nôtre Ouvrage, & en ſurmonter les difficultés, ſans l'aide d'aucun Maître.

Mais puiſqu'on a déjà pluſieurs Traités du Calcul Intégral, on eſt en droit de nous demander raiſon de nôtre travail, & en quoy cet Ouvrage differe des autres qui ont parû. Parmi les différents Traités que nous connoîſſons, quelques uns nous ſemblent trop elementaires, & peu propres a faire connoître ce qu'il y a de plus difficile en cette matiére; les autres ſont profonds & renferment les plus belles decouvertes en ce genre; mais

leurs illuftres Auteurs font de grands Hommes, qui occupés de la gloire de l'invention, ont peu fongé a l'avantage de ceux, qui afpirent a les comprendre.

C'eft d'aprés ces confiderations, que nous tafchons, dans l'Ouvrage que nous donnons au Public, de mettre nos Lecteurs a portée d'entendre ce qu'il y a de plus fublime dans le Calcul, en n'exigeant d'autres préparations que celles que nous venons d'indiquer.

La premiere Partie qui remplit tout le premier Volume, ne traite que des Intégrales a une variable, & nous nous flattons que cette Partie eft plus complette, ou du moins plus methodique que tout ce que nous connoîffons fur ce fujet. Nous traiterons dans la feconde des Intégrales a plufieurs variables. Nous avoüons avec reconnoîffance avoir profité, dans l'une & dans l'autre, de ce qu'ont écrit fur cette matiére plufieurs excellens Auteurs;

mais nous ne pouvons cependant nous diſſimuler, que la partie la plus difficile nous appartient; & nous pourrions en appeller au temoignage de pluſieurs Géometres, qui ont vû le fond de cet Ouvrage il y a plus de vingt cinq ans. Mais comme nous recherchons uniquement l'utilité des Commençants, nous renonçons volontiers a tout droit de préſcription, laiſſant a chacun la liberté de revendiquer ce qui eſt a lui, & ne diſputant pas même les choſes ſur lesquelles nous ſommes ſûrs d'avoir une proprieté egale. C'eſt par cette raiſon, que nous avons ſouvent ômis des noms reſpectables, cedant a quiconque voudra, tout ce qu'il croira devoir repeter; pourvû qu'on nous accorde la gloire d'avoir été utiles.

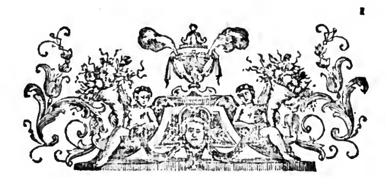
Nous ne pouvons trop exhorter nos Lecteurs a lire cet Ouvrage de ſuite & avec ordre, ſans interrompre la liaiſon des Calculs & des Demonſtrations. Nous recommandons ſurtout de s'arrêter avec beaucoup d'applica-

tion sur les derniers Chapitres, qui font un Commentaire sur l'excellent Traité de la quadrature des courbes de M. Newton. Cet Opuscule, peut-être trop negligé, renferme de grandes vües, qui ouvriroient un vaste champ a des méthodes elegantes de Calcul. Mais nous avons été obligés de nous resserrer dans les bornes de nôtre plan, & de reprimer plusieurs idées qui se presentoient a nous, & qui pourront dans la suite fournir matiére a des mémoires particuliers. On trouvera peu de Figures dans ce Traité, n'ayant pour but que le Calcul, & non les constructions géometriques.

Il nous reste a parler de l'occasion de cet Ouvrage. Peut-être seroit-il resté enseveli pour toujours, sans les instances & les conseils d'un très-habile Géometre, M. de Keralio. Nous lui devons un temoignage public de nôtre reconnoîssance, pour tous les secours, qu'il a bien voulu nous prêter, derobant des momens precieux consacrés a

l'education d'un Auguſte Prince, pour revoir & examiner nôtre travail, repeter les calculs avec tant de ſoin & d'attention, que nous nous ferions gloire de le regarder comme le troiſieme Auteur, ſi ce titre pouvoit luy faire autant d'honneur, qu'il en feroit a nous mêmes.

Si ces Elemens peuvent avoir quelque ſuccés, nous en ſerons d'autant plus ſatisfaits, qu'ils rempliront l'objet que nous nous étions propoſé, de laiſſer de nous un ſouvenir utile dans une Ville, où on nous a fait l'honneur de nous appeller, & dans laquelle l'état des Sciences ne tardera pas à devenir floriſſant par l'Exemple & la Protection du Souverain, & par la vigilance d'un Miniſtre eclairé.



ELEMENS DU CALCUL INTÉGRAL.

PREMIERE PARTIE
De l'intégration des Différentielles a une variable.

CHAPITRE PREMIER.
Des Principes Generaux du Calcul Différentiel, & Intégral.

I.

LORS qu'on compare entr' elles plusieurs quantités, dont les unes augmentent ou diminuent continuellement, tandis que les autres demeurent toujours les mêmes; On appelle les premieres de ces quantités, *Chan-*

geantes, ou *Variables*, & les secondes, *Constantes*. On designe ordinairement les Constantes par les premieres lettres de l'alphabet a, b, c, *&c.* & les variables par les dernieres x, z, y, v, *&c.*

II.

C' est un principe evident que, si une Variable z est augmentée ou diminuée d' une quantité quelconque, que nous nommerons Dz, & qu'elle devienne $z \mp Dz$, ces, deux quantités z & $z \mp Dz$ approcheront dautant plus de l' egalité, que leur différence Dz diminuera davantage par rapport a z, & qu'enfin elles deviendront egales dans l'instant que cette différence s'evanouïra.

III.

Les différences Dx & Dy de deux variables x & y peuvent dans l' instant de leur evanouïssement etre entr'elles comme deux quantités finies, constantes ou variables. Pour le demontrèr, supposons que CBM soit une ligne quelconque (Fig. 1.) rapportée a la droite CP par les ordonnées perpendiculaires BA, MP, $M'P'$, que, CA & AB etant des lignes constantes a & b, l'abscisse variable AP soit $=x$, son ordonnée $PM=y$, & qu'on ait l' equation a la ligne CBM. Premierement si CBM est une ligne droite, on aura la proportion CA (a): AB (b): : CP $(x+a)$: PM (y), d'ou

l'on tire l'equation $ab+bx=ay$. Si donc on ſuppoſe que l'abſciſſe AP augmente ou diminue de la quantité PP' que Nous nommerons Dx ou qu'elle devienne $AP'=x\mp Dx$, l'ordonnée PM augmentera auſſi ou diminuera de la quantité $NM'=Dy$, & deviendra $P'M'=y\mp Dy$; & en ſubſtituant $x\mp Dx$ au lieu de x, & $y\mp Dy$ au lieu de y dans l'equation $ab+bx=ay$, elle ſe changera en celle-ci $ab+bx\mp bDx=ay\mp aDy$, d'ou retranchant la premiere equation, on aura $\mp bDx=\mp aDy$, ou $bDx=aDy$; parconſequent $Dx : Dy :: a : b$, c'eſtadire que les différences Dx, Dy ſeront toujours entr'elles comme les conſtantes finies a & b, & qu'ainſi elles conſerveront le même rapport dans l'inſtant même de leur evanouïſſement.

Suppoſons en ſecond lieu, que la ligne CBM ſoit une parabole, dont le ſommet eſt C, la tangente CP, & l'equation $(a+x)^2=by$; dans cette hypotheſe, lorſque AP ou x augmentera de PP' & deviendra $x+Dx$, l'ordonnée y augmentera auſſi de $M'N$ & deviendra $y+Dy$, & en ſubſtituant ces deux quantités aulieu de x, & de y dans l'equation $(a+x)^2=by$, elle ſe changera en celle-ci $(a+x+Dx)^2=by+bDy$, ou $(a+x)^2+2aDx+2xDx+Dx\,Dx=by+bDy$, d'ou retranchant la premiere equation, on aura $2aDx+2xDx+Dx^2=bDy$, & $Dy : Dx :: 2a+2x+Dx : b$. Or dans l'inſtant que Dx & Dy s'evanouïſſent par rapport

a x & y, ou que l' ordonée $P'M'$ tombe sur PM, la quantité $2a+2x+Dx$ devient egale a $2a+2x$ (Art. II.). Donc alors Dy sera a Dx comme la quantité finie & variable $2a+2x$ est a la quantité finie & constante b. C. Q. F. D.

IV.

Lors qu'on considere la différence Dx d' une quantité variable x qui devient $x+Dx$, dans l' instant que cette différence s' evanouït, on l'appelle la *Differentielle* de cette variable x; & cette même variable x se nomme l' *Intégrale* de sa différentielle Dx. Nous supposerons toujours dans la suite que la petite lettre d placée devant une quantité variable signifie la différentielle de cette quantité: ainsi dx signifie la différentielle de x, & $d.(x+a)^2$ signifie la différentielle de la quantité complexe $(x+a)^2$, que nous avons trouvée $= 2xdx+2adx$ (Art. III.). La lettre S placée devant une différentielle quelconque, simple ou complexe, designe l' intégrale de ~~cette différentielle~~: ainsi $S.dx=x$, & $S.\ 2adx+2xdx = (x+a)^2$. On marque l'intégrale d' une differentielle dx par $S.dx$; par ce qu'on considere la différentielle dx comme un element de son intégrale x, & l' intégrale même x comme la somme de ses elements dx.

V.

Le Calcul différentiel eſt l'art de trouver les différentielles des quantités variables, & l'expreſſion de ces différentielles delivrées de leurs termes inutiles, c'eſt à-dire des termes qui s'evanouïſſent par rapport aux autres termes dont ces différentielles ſont compoſées. C'eſt par ce calcul qu'on trouve que la différentielle de $(a+x)^2$ eſt d'abord $2adx+2xdx+dx^2$, & en ſuite $2adx+2xdx$ en effaçant le terme dx^2, qui s'evanouït par rapport aux deux autres termes $2adx$, & $2xdx$. (Art. III.)

VI.

Voici la regle generale de ce calcul. ſupposéz que X repreſente en general la quantité variable, dont on veut trouver la différentielle. Si cette variable eſt toute ſimple, on ecrira dX pour ſa différentielle; mais ſi elle eſt compoſée de variables ſimples x, z, y, &c., & de conſtantes. I.° On ſubſtituera dans X aulieu de x, z, y, v, &c. les quantités $x+dx$, $z+dz$, $y+dy$, $v+dv$ &c. en mettant le ſigne — devant les différentielles ſimples qui ſont negatives, ou qui ſont les différentielles des variables ſimples, qui diminuent tandis que les autres augmentent; Comme ſi x devenant $x+dx$, z devenoit $z-dz$, on ſubſtitueroit $z-dz$ au lieu de z dans X. 2.° Suppoſant qu'apres ces ſubſtitutions la quantité

propofée X foit changée en une autre quantité que nous defignerons par X', on prendra la différence de ces deux quantités, qui fera dX. 3.° On effacera dans cette différence dX tous les termes qui s'evanouïffent par rapport aux autres termes, dont elle eft compofée; le refte fera la différentielle cherchée dX delivrée de fes termes inutiles.

EXEMPLE 1. On veut trouver la différentielle de $\frac{(a+x)^3}{3b}$. En fubftituant dans cette quantité $x+dx$ au lieu de x, elle devient $\frac{(a+x+dx)^3}{3b} =$ $\frac{(a+x)^3+3(a+x)^2dx+3(a+x)dx^2+dx^3}{3b}$ d'ou retranchant $\frac{(a+x)^3}{3b}$ il refte $\frac{(a+x)^2dx+(a+x)dx^2}{b}+\frac{dx^3}{3b}$. Or dans ce refte le terme $\frac{dx^3}{3b}$ s'evanouït par rapport au terme $\frac{(a+x)dx^2}{b}$, & celui-ci s'evanouït auffi par rapport au premier terme $\frac{(a+x)^2dx}{b}$; puifque $\frac{(a+x)dx^2}{b}+\frac{dx^3}{3b}$ eft à, $\frac{(a+x)dx^2}{b}$ comme $a+x+\frac{dx}{3}$ eft à $a+x$, & que $(a+x)^2dx+(a+x)dx^2 : (a+x)^2dx :: a+x+dx : a+x$. Donc la différentielle de la quantité propofée $\frac{(a+x)^3}{3b}$ eft $\frac{(a+x)^2}{b}.dx$.

EXEMPLE 2. Pour trouver la différentielle de la quantité $xz+a$, dans laquelle nous fuppofons que quand

x augmente & devient $x+dx$, z augmente aussi & devient $z+dz$; substituez $x+dx$, & $z+dz$ au lieu de x & de z, & la quantité proposée deviendra $xz+zdx+xdz+dxdz+a$, dou retranchant $xz+a$, le reste sera $zdx+xdz+dxdz$. Or en comparant les termes zdx & xdz avec le dernier terme $dxdz$, on voit que $zdx+dxdz : zdx :: z+dz : z$, & $xdz+dxdz : xdz :: x+dx : x$, & qu'ainsi le dernier terme s'evanouït par rapport aux deux autres. La différentielle cherchée sera donc $zdx+xdz$. Si l'on suppofoit que x augmentant, z diminuât, il faudroit ecrire dans cette différentielle $-dz$ aulieu de $+dz$, & elle deviendroit $zdx-xdz$.

VII.

Le calcul intégral est l'art de trouver les intégrales des différentielles proposées. On cherche par ce Calcul la solution du probleme inverse du calcul différentiel. Le probleme general du Calcul différentiel, est celui-ci : *Une quantité variable etant donnée, en trouver la différentielle*; Nous venons d'en donner la solution generale. Le probleme general du Calcul intégral est celui-ci: *Une différentielle etant donnée en trouver l'intégrale*. Il s'en faut bien qu'on en ait la solution generale; Car il y a beaucoup de différentielles dont on ne peut point trouver les intégrales, & beaucoup d'autres dont on ne peut les trouver qu'imparfaitement & par

approximation. Tout ce qu'on peut dire en general, c'est qu'il faut faire beaucoup d'atténtion aux procedés du Calcul différentiel pour parvenir a ceux du Calcul intégral.

VIII.

THEOREME. Dans une courbe quelconque (fig. 2.) dont les ordonnées PM, $P'M'$ sont perpendiculaires aux abscisses AP, AP', la différentielle de l'aire finie $ABMP$ est egale au rettangle $PMNP'$, lorsque la différence PP' des abscisses s'evanouït, ou que les ordonnées $P'M'$, PM tombent l'une sur l'autre; en sorte que si on fait l'abscisse $AP=x$, & l'ordonnée $PM=y$, la différentielle de l'aire $ABMP=ydx$, & $S.ydx=ABMP$.

DEMONSTRATION. Ayant tiré MN perpendiculaire a $P'M'$ & achevé le rectangle $P'M'OP$, la différence des aires $ABMP$ & $ABM'P'$ sera le trapeze $PMM'P'$; or lorsque PP' s'evanouït ou devient dx, le rectangle $POM'P'$ devient $ydx+dxdy$, & le rectangle $PMNP'=ydx$; & par ceque $ydx+dxdy : ydx :: y+dy : y$, & que $y+dy=y$ (Art. II.), le rectangle $POM'P'=PMNP'$; donc aussi le trapeze $PMM'P$ sera egal au rectangle $PMNP'$ ou $=ydx$. C.Q.F.D.

IX.

IX.

THEOREME. En ſuppoſant les mêmes choſes, ſi on nomme s l'arc BM de la courbe, on aura $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$.

DEMONSTRATION. Si on conçoit que l'arc BM eſt diviſé en un tres grand nombre de petits arcs comme MM', chacun avec ſa corde; il eſt evident qu'en augmentant toujours le nombre de ces petits arcs & de leurs cordes, & en diminuant toujours leurs grandeurs, la ſomme des cordes approchera toujours de l'egalité avec la ſomme des arcs; & qu'enfin dans l'inſtant que chacun de ces arcs s'evanouïra, la ſomme des cordes ſera egale a la ſomme des arcs ou a l'arc BM; & que la différence MM' des arcs BM & BM' en s'evanouiſſant ou en devenant ds, deviendra auſſi egale a la différence de la ſomme des cordes, ou egale a la corde evanouïſſante de l'arc MM'; or a cauſe de l'angle droit MNM', le quarré de la corde MM' eſt egal aux deux quarrés des cotés MN & NM', ou de dx & dy. Donc $ds^2 = dx^2 + dy^2$, & $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$. C. Q. F. D.

X.

THEOREME. Les mêmes choſes etant ſuppoſées, ſi on prolonge la corde MM' de l'arc MQM' (fig. 3.)

Jusqu'a ce qu'elle rencontre la ligne des abscisses au point T; lorsque MM' & PP' s'evanouïront, la ligne MT sera tangente de la courbe au point M, & la soutangente PT sera $= \frac{y\,dx}{dy}$.

DEMONSTRATION. Ayant prolongé la corde MM' de l'arc MQM' de part & d'autre en R & en T; Si on conçoit que l'ordonnée $P'M'$ s'approche toujours de l'autre ordonnée PM, il est evident que la secante $TMM'R$ s'approchera toujours de la position de la tangente tirée par le point M ou M', & qu'enfin cette secante tombera sur la tangente dans l'instant que ses deux points d'interfection avec la courbe M & M' se reuniront en un seul point M, qui sera le point d'attouchement, ou dans l'instant que PP' ou MN s'evanouïra & deviendra dx, & que NM deviendra dy; or les deux triangles semblables $M'NM$ & MPT donnent toujours cette proportion $M'N : NM :: MP : PT$, ou $dy : dx :: y : PT$ lorsque TM devient tangente. Donc dans ce cas $PT = \frac{y\,dx}{dy}$. *C. Q. F. D.*

XI.

THEOREME. Une quantité variable a la même différentielle lors qu'elle est seule, & lors qu'elle est jointe par addition ou par soustraction avec une quantité constante.

DEMONSTRATION. Que x reprefente une quantité variable quelconque & c une conftante pofitive ou negative; la différentielle de x fera dx; & celle de $x+c$ fe trouve en fubftituant dans cette quantité $x+dx$ au lieu de x, pour avoir $x+dx+c$, & en retranchant $x+c$, il reftera aufi dx pour la différentielle de $x+c$ (Art. VII.) *C. Q. F. D.*

XII.

COROLLAIRE 1. Les quantités conftantes n'ont point de différentielles. Ce qui elt d'ailleurs evident, parceque les conftantes n' augmentent ni ne diminuent, tandis que les variables changent continuellement (Art. I.)

XIII.

COROLLAIRE 2. Lors qu'on, a trouvé l'integrale x d'une différentielle propofée dx on peut lui ajouter une conftante quelconque c, pofitive ou negative; a moins que les circonftances qui ont donné cette differentielle & fon intégrale ne fervent a determiner cette conftante, ou a faire connoitre qu'elle eft egale a zero, ou quil ny en a point a ajouter. Dans ce cas on pourra fe fervir de la regle fuivante.

XIV.

Regle pour trouver la valeur de la constante, qu'il faut ajouter a une integrale pour la rendre complete, lors qu'elle n'est point arbitraire, mais determinée par les circonstances du probleme.

Supposons que pour resoudre un probleme on ait trouvé une differentielle dX & en suite son integrale X, composée comme on voudra, de variables & de constantes, & que les circonstances du probleme fassent connoitre que l' integrale complete $X+c$ doit etre egale ou a zero, ou a une quantité donnée A, lors que les variables simples x, z, y, v, dont elle est composée, sont supposées egales ou a zero, ou a des quantités données a, b &c. Cela posé, substituez dans l'intégrale trouvée X les valeurs, a, b, &c. ou zero, au lieu des variables x, z, &c.; & que par cette substitution l' integrale X devienne egale a une quantité connue B. Puis qu'apres la substitution l'integrale complete $X+c$, ou $B+c$ doit être egale ou a zero, ou a la quautité A; vous aurez $B+c=A$, ou $B+c=o$, & $c=A-B$, ou $c=-B$; par consequent l'integrale complete $X+c$ sera $X+A-B$, ou $X-B$.

EXEMPLE I. On a trouvé par le Calcul que xz est l'intégrale de la différentielle $xdz+zdx$, & on sçait par les circonstances qui ont donné cette différentielle,

que ſon intégrale complete $xz+c$ doit etre egale à la quantité a, lorſque les variables x & z devienent nulles, ou que $xz=o$: on aura donc $xz+c=o+c=a$, & par conſequent l'intégrale complete $xz+c$ ſera $xz+a$.

EXEMPLE 2. La courbe CBM eſt une parabole (fig. 4.) dont l'equation eſt $\frac{(a+x)^2}{b}=y$, en ſuppoſant $CA=a$, $AB=b$, $AP=x$, $PM=y$ comme dans l'Article III. On veut trouver l'eſpace ou l'aire parabolique $ABMP$; la différentielle de cet eſpace eſt le rectangle $PMNP=y\,dx$ (Art. VIII.); puis donc que $y=\frac{(a+x)^2}{b}$ on aura $y\,dx=\frac{(a+x)^2}{b}\,dx$, dont l'intégrale eſt $\frac{(a+x)^3}{3b}$ (Exemple 1. de l'Art. VII.); donc $S.y\,dx=ABMP=\frac{(a+x)^3}{3b}+c$. Mais l'eſpace parabolique $ABMP$ devient nul, lorſque PM tombe ſur AB, ou que x devient zero. En ſubſtituant donc o au lieu de x dans l'intégrale trouvée $\frac{(a+x)^3}{3b}$, on aura $\frac{(o+a)^3}{3b}+c=o$, ou $\frac{a^3}{3b}+c=o$, $c=-\frac{a^3}{3b}$; par conſequent l'intégrale complete $\frac{(a+x)^3}{3b}+c=\frac{(a+x)^3}{3b}-\frac{a^3}{3b}=\frac{x^3+3ax^2+3aax}{3b}=ABMP$.

XV.

Nous ſuppoſerons dans la ſuite que lors qu'on aura trouvé par le calcul l'intégrale X d'une différentielle quelconque dX, on lui ajoutera s'il eſt neceſſaire pour la rendre complete, la conſtante c determinée par les circonſtances, comme nous venons de l'expliquer dans la regle; & nous ne ferons mention que de l'intégrale X trouvée par le calcul, a moins qu'il n'y ait quelque raiſon particuliere de faire attention a la conſtante.

XVI.

THEOREME. La différentielle du produit ax d'une variable x multipliée par une conſtante a eſt adx, & celle du quotient $\frac{x}{a}$ eſt $\frac{dx}{a}$.

DEMONSTRATION. Pour trouver la différentielle du produit ax, il faut ſubſtituer dans ce produit $x+dx$ au lieu de x, & le changer en $ax+adx$ d'ou otant ax, le reſte adx ſera la différentielle de ax (Art. VI.). On trouve par la même ſubſtitution que $\frac{x}{a}$ devient $\frac{x+dx}{a}$, d'ou ayant retranché $\frac{x}{a}$ le reſte $\frac{dx}{a}$ eſt la différentielle du quotient $\frac{x}{a}$ (Art. VI.) *C. Q. F. D.*

XVII.

COROLLAIRE. Donc pour trouver l'intégrale d'une différentielle multipliée, ou divisée par une constante on n'a qu'a prendre l'intégrale de cette différentielle sans avoir égard a la constante, & en suite multiplier ou diviser cette intégrale par la constante. Et de même pour trouver la différentielle d' une variable multipliée ou divisée par une constante, il suffit de prendre la différentielle de la variable sans faire attention a la constante, & de la multiplier ou diviser par cette constante. Ainsi lorsqu'on connoit l' intégrale d' une différentielle, on trouve aisement l'integrale de la même différentielle multipliée ou divisée par des constantes données.

XVIII.

THEOREME. La différentielle d' une quantité composée de plusieurs termes variables joints ensemble par les signes $+$ ou $-$, est egale a la somme des différentielles de chaque terme jointes ensemble par leurs signes $+$ ou $-$.

DEMONSTRATION. En supposant que dans la quantité composée $x+z-v+$&c. les variables augmentent toutes en même tems, & deviennent $x+dx$, $z+dz$, $v+dv$, &c. cette quantité deviendra $x+dx+z+dz-v-dv+$ &c. d' ou ayant retranché $x+z-v+$ &c. le reste $dx+$

$dz - dv +$ &c. sera la différentielle de $x + z - v +$ &c. (Art. VI.). Et de même si on suppose que x devenant $x + dx$, z devienne $z - dz$, & v devienne $v + dv$, la quantité $x + z - v +$ &c. deviendra $x + dx + z - dz - v - dv +$ &c. d'ou ayant oté $x + z - v +$ &c., le reste $dx - dz - du +$ &c. sera la différentielle de $x + z - v +$ &c. *C.Q.F.D.*

XIX.

COROLLAIRE. Donc l'intégrale d'une suite de différentielles jointes par les signes $+$ ou $-$ se trouve en prenant en particulier les intégrales de chaque différentielle, & en les joignant par leurs signes $+$ ou $-$.

XX.

THEOREME. La différentielle du produit xzv &c. de plusieurs variables x, z, v &c. est egale a la somme des différentielles qu'on trouve en multipliant la différentielle de chaque variable par le produit de toutes les autres variables.

DEMONSTRATION. I.° La différentielle du produit xz de deux variables x & z, est $zdx + xdz$ en supposant que ces deux variables croissent toutes les deux en même tems, & deviennent $x + dx$, & $z + dz$; & cette différentielle est $zdx - xdz$, lorsque la variable x devenant $x + dx$, l'autre z devient $z - dz$. (Art. VI. Exemple 2.) *C.Q.F.D.*

2.° La

2.° La différentielle du produit xzv de trois variables x, z, v, eſt $zvdx+xvdz+xzdv$, en ſuppoſant que ces variables croiſſent toutes en même tems. Pour le demontrer ſuppoſons $xz=s$ ou $xzu=su$; Nous aurons par le premier cas $zdx+xdz=ds$, & $d.\overline{xzu}=uds+sdu=zudx+xudz+xzdu$, en ſubſtituant dans $uds+sdu$ la différentielle $zdx+xdz$ aulieu de ds, & xz aulieu de s. ſi on ſuppoſe que, x & u croiſſant, z diminue, c'eſt a dire que $+dz$ devient $-dz$, alors on auroit $d.\overline{xzu}=zudx-xudz+xzdu$. *C.Q.F.D.*

3.° La différentielle du produit $xzuy$ eſt $zuydx+xuydz+xzydu+xzudy$, en ſuppoſant que toutes les variables croiſſent en même tems. On le demontre en faiſant $xzu=s$, ou $xzuy=sy$, par conſequent $zudx+xudz+xzdu=ds$, & $d.\overline{xzuy}=yds+sdy$, & en ſubſtituant dans $yds+sdy$ au lieu de ds, & de s leurs valeurs, on trouve la différentielle $d.\overline{xzuy}=zuydx+xuydz+xzydu+xzudy$. *C.Q.F.D.*

4.° On demontre de la même maniere tous les autres cas de cinq, ſix ou d'un plus grand nombre de variables, & on voit clairement par cette maniere la verité du Theoreme general qu'il falloit demontrer.

XXI.

COROLLAIRE. Si on ſubſtitue dans la différentielle du produit de pluſieurs variables x, z, u, &c. les integra-

C

les x, z, u &c. au lieu de leurs différentielles dx, dz, du, &c.; apres ces fubftitutions chaque terme de la différentielle complexe, fera l'intégrale de toute cette différentielle. Ainfi en fubftituant x aulieu de dx, & z au lieu de dz dans la différentielle complexe $zdx + xdz$, le terme zdx devient zx, & l'autre terme xdz devient auffi xz, qui eft l'intégrale de la différentielle complexe $zdx + xdz$. De même par la fubftitution de x aulieu de dx, de z au lieu de dz, &c. dans la différentielle $zudx + xudz + xzdu$ chaque terme devient xzu, qui eft l'intégrale de toute cette différentielle complexe. Et ainfi des autres cas.

XXII.

COROLLAIRE. 2. La différentielle de x elevée a la puiffance dont l'expofant eft un nombre entier pofitif m, ou $d.x^m = mx^{m-1}dx$. Car fi l'on confidere la feconde puiffance x^2 comme le produit xx de deux variables egales x & x, on trouvera par le premier cas du theoreme precedent que $d.x^2 = xdx + xdx = 2xdx = mx^{m-1}dx$, en fuppofant $m = 2$; on prouvera de même par le fecond cas que $d.x^3 = x^2dx + x^2dx + x^2dx = 3x^2dx = mx^{m-1}dx$, en fuppofant $m = 3$; par le troifieme cas on trouvera $dx^4 = 4x^3dx = mx^{m-1}dx$, en fuppofant

$m=4$; & par le theoreme general on comprendra aisément que $d.x^m = mx^{m-1}dx$.

XXIII.

THEOREME. La différentielle d'une fraction $\frac{x}{z}$ dont le numerateur & le denominateur sont variables, est $\frac{zdx-xdz}{zz}$, lors qu'on suppose que x & z croissent en même tems; & cette différentielle est $\frac{zdx+xdz}{zz}$, lors que le numerateur croissant, le denominateur decroit.

DEMONSTRATION. Pour demontrer ce theoreme supposons $\frac{x}{z}=s$, par consequent $x=sz$, $dx=zds \mp sdz$ (Art. XX.); & $ds=d.\frac{x}{z}=\frac{dx\pm sdz}{z}$, selon que la différentielle dz est negative ou positive. Or en substituant dans le terme sdz la valeur de s, qui est, $\frac{x}{z}$, on trouve $sdz=\frac{xdz}{z}$; d'ou l'on cunclut que $d.\frac{x}{z}=\frac{dx}{z}\pm\frac{xdz}{zz}=\frac{zdx\pm xdz}{zz}$. *C.Q.F.D.*

XXIV.

COROLLAIRE. La différentielle de la fraction $\frac{a}{z}$ dont le numerateur est constant & le denominateur va-

riable, eſt $-\frac{adz}{zz}$; car en faiſant $\frac{a}{z}=s$, on a, $a=sz$, & $da=o=zds+sdz$, par conſequent $ds=d.\frac{a}{z}=-\frac{sdz}{z}=-\frac{adz}{zz}$, en ſubſtituant $\frac{a}{z}$ au lieu de s.

XXV.

THEOREME. La différentielle de la puiſſance x^m eſt $mx^{m-1}dx$, quelque ſoit l'expoſant m, pourvu qu'il ſoit conſtant.

DEMONSTRATION. 1.er Cas. Lorſque l'expoſant m eſt un nombre entier & poſitif, on l'a demontré a l'Art. XXII.

2.e Cas. Lorſque l'expoſant m eſt un nombre entier negatif, ou que la puiſſance eſt x^{-m}; il faut demontrer que $d.x^{-m}=-mx^{-m-1}dx$. Suppoſons pource-la x^{-m} ou $\frac{1}{x^m}=s$, par conſequent $1=sx^m$; & enprenant les différentielles de part & d'autre du ſigne d'egalité, $o=x^m ds+msx^{m-1}dx$ (Art. XII. XX. & XXII.) donc

$$ds=d.x^{-m}=\frac{-msx^{m-1}dx}{x^m}=-msx^{-1}dx=-$$

$\frac{mx^{-1}dx}{x^m}=-mx^{-m-1}dx$, en ſubſtituant au lieu de s

ſa valeur $\frac{1}{x^m}$. *C. Q. F. D.*

3.ᵉ Cas. Lorſque m eſt un nombre rompu poſitif ou negatif, ou que $x^m = x^{\frac{n}{p}}$ en ſuppoſant $m = \frac{n}{p}$, & que p & n ſont des nombres entiers poſitifs ou negatifs; il faut demontrer que la différentielle de $x^{\frac{n}{p}}$ eſt $\frac{n}{p} x^{\frac{n}{p}-1} dx$. Suppoſons pourcela $x^{\frac{n}{p}} = s$, ou $x^n = s^p$; en prenant les différentielles de part & d'autre on aura $d. x^{\frac{n}{p}} = ds$, & $n x^{n-1} dx = p s^{p-1} ds$ pour les deux premiers Cas; d'ou l'ontire $ds = \frac{n x^{n-1} dx}{p s^{p-1}}$. Or puiſque $x^n = s^p$ on a $\frac{x^n}{s} = s^{p-1}$, donc on aura $ds = \frac{n s x^{n-1} dx}{p x^n} = \frac{n s x^{-1} dx}{p} = \frac{n x^{\frac{n}{p}-1} dx}{p}$ en ſubſtituant $x^{\frac{n}{p}}$ aulieu de s dans $n s x^{-1} dx$. C. *Q. F. D.*

XXVI.

THEOREME. X etant une fonction compoſée comme on voudra de variables x, y, z, u, &c. & de conſtantes,

ſi on prend ſa différentielle, 1.° en ſuppoſant que de toutes les variables, x, y, z, u, &c. la ſeule x demeure variable, & que toutes les autres y, z, u, &c. deviennent conſtantes; 2.° en ſuppoſant que toutes les variables x, z, u, &c. ſont conſtantes, excepté la ſeconde y; 3.° en ſuppoſant que toutes les variables ſont conſtantes, excepté la troiſieme z; en continuant ainſi a prendre les differentielles de X jus qu'a ce qu'on ſoit parvenu a la derniere variable : la ſomme de toutes ces différentielles ſera la différentielle de la fonction X, telle qu'on la trouve par la regle generale du calcul différentiel (Art XX.) en ſuppoſant que x, y, z, u, &c. ſont toutes variables en même tems.

Demonstration. 1° Nous avons demontré (Art. XVIII.) que ſi la fonction X eſt compoſée comme on voudra de pluſieurs parties variables jointes enſemble par les ſignes $+$ ou $-$, comme $x+y+z-u$ &c. la différentielle dX trouvée par la regle generale ſera $dx+dy+dz-du$ &c. Or en differentiant X, 1.° en ſuppoſant que la ſeule quantité x eſt variable, on a dx; 2.° en ſuppoſant y ſeule variable, on a dy; 3.° en ſuppoſant z ſeule variable, on a dz. 4.° en ſuppoſant u ſeule variable, on a $-du$ &c., & la ſomme de toutes ces differentielles eſt $dx+dy+dz-du+$ &c. telle qu'on la trouvée en differentiant la fonction X par la regle generale.

2.° Lorſque X eſt compoſée de variables & de conſtantes, multipliées les unes par les autres comme xyz, &c. Nous avons demontré (Art. XX.) que la différentielle dX eſt egale a la ſomme des produits qu'on trouve en multipliant la différentielle de chaque variable par le produit de toutes les autres variables. Or cette ſomme eſt la même que celle qu'on trouve en prenant ſucceſſivement les différentielles de X dans les ſuppoſitions que toutes les variables ſont conſtantes, 1.° excepté la premiere, 2.° excepté la ſeconde, 3.° excepté la troiſieme, & ainſi de ſuite juſqu'a la derniere variable, & en àjoutant enſemble toutes ces différentielles.

3.° Lorſque X eſt compoſée de variables diviſées comme on voudra les unes par les autres comme $\frac{x}{y}$; ſi on met une autre variable p a la plaſe de $\frac{1}{y}$, on aura $\frac{x}{y} = xp$, & la demonſtration ſera la même que dans le cas precedent.

4.° Enfin, lorſqne les parties de la fonction X renferment des puiſſances, des radicaux, ou d' autres fonctions quelconques des variables, on peut mettre a la place de chacune de ces fonctions une autre variable, & la demonſtration demeure la même que dans les cas precedens. Donc ce theoreme eſt demontré dans tous les cas poſſibles.

XXVII.

COROLLAIRE. 1.° Si la fonction X ne contient que deux variables x, & y, sa differentielle dX pourra toujours etre exprimée par $Adx+Bdy$, en supposant que A est la quantité finie qu'on trouve en differenciant X dans la supposition de y constante & de x variable, & B etant la quantité finie qu'on trouve en différentiant la fonction X dans la supposition de x constante & de y variable; car la differentielle de X en ne supposant que x variable, doit toujours etre une quantité finie multipliée par dx; & en ne supposant que y variable la différentielle de X doit toujours etre une quantitè finie multiplié par dy. On demontre de même que si la fonction X ne contient que trois variables x, y, z, la différentielle dX pourra toujours etre exprimée par $Adx+Bdy+Cdz$, en supposant que A, B & C sont les quantités finies qu'on trouve en differenciant X dans les suppositions, 1.° que x seule est variable, 2.° que c'est y seule, & 3.° que c'est la seule z. On prouve de la même maniere que si la fonction X ne contient que quatre variables x, y, z, & u sa différentielle dX pourra etre exprimée par $Adx+Bdy+Cdz+Ddu$; & que si elle en contient cinq, x, y, z, u, s, sa différentielle dX sera $Adx+Bdy+Cdz+Ddu+Eds$; & ainsi de suite, en supposant

que

que A, B, C, D, E &c. ſont les quantités finies qu'on trouve en différenciant X dans les ſuppoſitions 1.° de x ſeule variable, 2.° de y ſeule variable &c.

XXVIII.

COROLLAIRE. 2.° Lorſque la différentielle dX a une intégrale X on peut la trouver en intégrant dans ſon expreſſion $Adx+Bdy+Cdz+$ &c. 1.° Le terme Adx en ſuppoſant que x ſeule eſt variable, 2.° le terme Bdy en ſuppoſant que y ſeule eſt variable, & ainſi de ſuite juſqu'au dernier terme, & en comparant entr'elles toutes ces intégrales. Car ſi elles ſont toutes les mêmes, on aura dans la premiere $S.\ Adx$ l'intégrale cherchée ; Si elles ſont différentes on ajoutera a ce qu'elles ont de commun, tous les termes qui ſont leurs différences pour avoir l'intégrale X, a laquelle on pourra ajouter une conſtante ſuivant la regle (Art. XVI.) voici la raiſon de ce procedé: puis qu'on a trouvé le premier terme Adx en différenciant dans la ſuppoſition que x ſeule etoit variable ; & toutes les autres, y, z, &c. conſtantes ; en intégrant Adx dans la même ſuppoſition, on aura un intégrale $S.\ Adx$ qui rendra X dans la même ſuppoſition ; mais comme la fonction X peut etre compoſée de termes qui ne contiennent point la variable x, & que tous ces termes s'evanouïſſent en différentiant X dans la ſuppoſition que

toutes les variables y, z &c. font conftantes; on ne retrouvera pas ces termes dans l' intégrale $S. A dx$; mais on les trouvera dans les autres intégrales $S. B dy$, $S. C dz$, &c. dont les différentielles $B dy$, $C dz$, &c. ont eté trouvées en fuppofant fucceffivement que y, z, &c. etoient variables; car $B dy$ etant la différentielle de X dans la fuppofition de y variable, les termes de X dans les quels fe trouvent y, n'ont point eté detruits par la différentiation de X pour trouver $B dy$; on les retrouvera donc dans l' intégrale $S. B dy$; & ainfi des autres. Mais il faut eclaïrcir ceci par un exemple facile.

Si on fuppofe $X = y^2 x^3 + a y x^2 + b x + c y^2 + q$ conftante; on trouvera $dX = 3 y^2 x^2 dx + 2 y x^3 dy + 2 a y x dx + a x^2 dy + b dx + 2 c y dy = (3 y^2 x^2 + 2 a y x + b) dx + (2 y x^3 + a x^2 + 2 c y) dy = A dx + B dy$, en faifant $A = 3 y^2 x^2 + 2 a y x + b$, & $B = 2 y x^3 + a x^2 + 2 c y$. Or en intégrant $A dx$ dans la fuppofition de x variable & de y conftante, on trouve $S. A dx = y^2 x^3 + a y x^2 + b x$; & en integrant $B dy$ dans la fuppofition de x conftante, on trouve $S. B dy = y^2 x^3 + a x^2 y + c y^2$; & en comparant ces deux intégrales, on trouve que leurs termes communs font $y^2 x^3 + a x^2 y$, & leurs termes différens $b x$ & $c y y$; en les ajoutant enfemble on a $y^2 x^3 + a x^2 y + b x +$

cyy pour l'intégrale X, a laquelle on pourra ajouter une conſtante ſuivant la regle (Art. XVI.)

XXIX.

THEOREME. Si X eſt una fonction quelconque composée de deux variables x & y & de conſtantes, & par conſequent $dX = Adx + Bdy$; la différentielle de Adx priſe dans la ſuppoſition de x conſtante & de y variable ſera egale a la différentielle de Bdy priſe dans la ſuppoſition contraire de y conſtante, & de x variable.

DEMONSTRATION. Si dans la fonction X on ſubſtitue $x+dx$ au lieu de x & $y+dy$ au lieu de y, & que par ces ſubſtitutions X devienne X', la différentielle de X, ou dX ſera $X' - X = Adx + Bdy$ (Art. XXVII.)

Si dans la même fonction X on ſubſtitue ſeulement $x+dx$ au lieu de x en conſiderant y comme conſtante, & que par cette ſubſtitution X devienne R; en ſubſtituant enſuite dans R, $y+dy$ au lieu de y, R deviendra X': puis que c'eſt la même choſe de ſubſtituer en même tems dans X les deux quantités $x+dx$ au lieu de x & $y+dy$, au lieu de y, ou de ſubſtituer d'abord dans X la quantité $x+dx$ au lieu de x pour changer X en R, & de ſubſtituer enſuite dans R la quntité $y+dy$ au lieu de y.

Par la même raiſon ſi on ſubſtitue dabord dans X la quantité $y+dy$ au lieu de y, & que par cette ſubſtitution X devienne S; en ſubſtituant en ſuite dans S la quantité $x+dx$ au lieu de x, on changera S en X'.

Donc ſi on différencie X en ſuppoſant x variable & y conſtante, la différentielle ſera $R-X=Adx$; & ſi on différencie X en ſuppoſant y variable & x conſtante la différentielle ſera $S-X=Bdy$ (Art. XXVII.)

Mais parce qu'en ſubſtituant $y+dy$ au lieu de y dans R, & $y+dy$ au lieu de y dans X, R devient X' & X devient S, & que par conſequent $R-X$ devient $X'-S$; la différentielle de $R-X$ qui eſt celle de Adx, en ſuppoſant y ſeule variable & x conſtante eſt $X'-S-R+X$ (Art. XXVII.)

De même puis qu'en ſubſtituant dans X la quantité $y+dy$ au lieu de y, X devient S, & $S-X=Bdy$; & qu'en ſubſtituant dans S & dans X la quantité $x+dx$ au lieu de x, S devient X' & X devient R, & par conſequent $S-X$ devient $X'-R$. La différentielle de $S-X$ ou de Bdy en ſuppoſant x variable & y conſtante ſera $X'-R-S+X$, la même qu'on a trouvée pour la différentielle de Adx en ſuppoſant y variable & x conſtante. *C. Q. F. D.*

XXX.

COROLLAIRE. 1.° Donc si on prend la différentielle de $Adx + Bdy$ en supposant y variable & x constante dans Adx, & aucontraire x variable & y constante dans Bdy, on aura $dA.dx = dB.dy$, & par consequent $\frac{dA}{dy} = \frac{dB}{dx}$. Et si on propose de trouver l'intégrale d'une différentielle $Adx + Bdy$ dans laquelle A & B sont des fonctions de deux variables x & y & de constantes; cette différentielle n'aura point d'intégrale finie X, a moins que $\frac{dA}{dy}$ ne soit egale a $\frac{dB}{dx}$ en prenant la différentielle dA dans la soppofition de x constante & de y variable, & en prenant la différentielle dB dans la supposition contraire de y constante & de x variable. Mais si en prenant les différentielles comme nous venons de le dire, on trouve $\frac{dA}{dy} = \frac{dB}{dx}$, on trouvera l'intégrale de $Adx + Bdy$ par la methode du Corollaire 2. du Theoreme precedent.

XXXI.

COROLLAIRE. 2.° Si X est une fonction quelconque composée de trois variables x, y, & z & de constantes, & par consequent $dX = Adx + Bdy + Cdz$; on aura ces trois equations $\frac{dA}{dy} = \frac{dB}{dx}$, $\frac{dA}{dz} = \frac{dC}{dx}$, & $\frac{dB}{dz}$

$= \frac{dC}{dy}$, en prenant pour la premiere equation la différentielle dA dans la ſuppoſition de y ſeule variable, & la différentielle dB dans la ſuppoſition de x ſeule variable; En prenant pour la ſeconde equation la différentielle dA dans la ſuppoſition de z ſeule variable, & la différentielle dC dans la ſuppoſition de x ſeule variable, & de même en prenant pour la troiſieme equation la différentielle dB dans la ſuppoſition de z ſeule variable, & la différentielle dC dans la ſuppoſition de y ſeule variable. Car puiſque $Adx + Bdy + Cdz$ eſt la différentielle de la fonction finie X compoſée de trois variables x, y & z, ſi on ſuppoſe z conſtante, le dernier terme Cdz s'evanouïra, & la fonction X ne contiendra que deux variables x & y, par conſequent ſa différentielle ſera $Adx + Bdy$, dans la quelle on aura $\frac{dA}{dy} = \frac{dB}{dx}$ par le Cor. 1.; & ſi on ſuppoſe y conſtante la différentielle Bdy s'evanouïra, & la différentielle deviendra $Adx + Cdz$, dans la quelle on aura $\frac{dA}{dz} = \frac{dC}{dx}$; & on prouvera de même qu'en ſuppoſant x conſtante, on aura $\frac{dB}{dz} = \frac{dC}{dy}$.

Si la différentielle $Adx + Bdy + Cdz$ fournit les trois equations $\frac{dA}{dy} = \frac{dB}{dx}$, $\frac{dA}{dz} = \frac{dC}{dx}$, & $\frac{dB}{dz} = \frac{dC}{dy}$, on trouvera ſon intégrale X par le Cor. 2. du Theoreme

precedent; mais si elle ne donne pas ces trois equations, elle n'aura point d'intégrale finie X.

Ce n'est pas icy le lieu de traiter cette matiere plus au long, il suffit d'avoir demontré avec simplicité les deux dernieres Theoremes qui sont le fondement des principales decouvertes qu'on a faites dans le calcul intégral; Nous en ferons un grand usage dans la suite de cet ouvrage.

XXXII.

LEMME pour servir de preparation a l'usage des Logarithmes dans les Calculs différentiel & intégral.

1.° La courbe BMR (fig. 5.) dont les ordonnèes AB, PM, QR, &c. etant en progression geometrique, les abcisses correspondantes o, AP, AQ &c. sont en progression arithmetique, se nomme *Logarithmique*; par ce que les abscisses peuvent etre prises pour les logarithmes de leurs ordonnées. On peut prendre pour l'unité une ligne donnée quelconque entre ses ordonnées, & determiner ensuite les rapports des autres lignes a celle-la, & les exprimer par des nombres. Nous supposerons a l'ordinaire, que l'ordonnée AB, ou commencent les abscisses, o, AP, AQ &c. & dont le logarithme est zero, represente l'unité, & que toutes les autres ordonnées, comme PM, QR, &c. pouront etre exprimées, par des nombres, qui marquent leurs rapports a l'ordonnée AB.

2.° Si par un point quelconque M de la logarithmique on tire une tangente MT, qui rencontre l'axe ou la ligne des abſciſſes au point T, je dis que la ſoutangente PT ſera conſtante, en ſorte que ſi l'on méne par un autre point R de la courbe une autre tangente RT', les deux ſoutangentes PT & QT' ſeront egales. Car ſuppoſant que l'ordonnée PM ſoit a ſa voiſine $P'M'$ comme l'ordonnée QR a $Q'R'$, & que par conſequent les abſciſſes correſpondantes ſoient en proportion arithmetique, ou que leurs différences PP' & QQ' ſoient egales ; faiſons $AP=x$, $PM=y$, $PP'=dx=QQ'$, $M'N=dy$, $QR=u$, $SR'=du$; nous aurons la proportion geometrique $y:y+dy::u:u+du$, & par la ſouſtraction des antecedens $y:dy::u:du$, & $\frac{y}{dy}=\frac{u}{du}$, mais la ſoutangente $PT=\frac{ydx}{dy}$, & $QT=\frac{udx}{du}$(Art. x.). Donc en ſubſtituant $\frac{y}{dy}$ au lieu de ſon egale $\frac{u}{du}$, on aura $QT'=PT$. C.Q.F.D.

3.° Si l'on deſigne par a la ſoutangente PT, on aura pour l'equation différentielle a la logarithmique $\frac{ydx}{dy}=a$, ou $\frac{dx}{a}=\frac{dy}{y}$, & en integrant $\frac{x}{a}=S.\ \frac{dy}{y}$. Puis donc que x eſt le logarithme de y, pris dans la logarithmique dont la ſoutangente eſt a, on a ce

THEO-

THEOREME GENERAL.

L' intégrale $S.\frac{dy}{y}$, *ou l' intégrale d' une fraction* $\frac{dy}{y}$ *dont le numerateur* dy *est la différentielle du denominateur* y, *est le logarithme* x *du denominateur divisé par la soutangente* a *de la logarithmique ou l' on prend ce logarithme.*

4.° Par les mêmes raisons, si on suppose que z est le logarithme d'une ordonnée quelconque u, dans une autre logarithmique dont la soutangente soit b; on aura $\frac{z}{b} = S.\frac{du}{u}$, & si l'on suppose de plus que les ordonnées y & u prises dans les deux logarithmiques dont les soutangentes sont a & b, soient les mémes, ou qu'elles soient exprimées par le même nombre, en faisant $u = y$, on aura $\frac{z}{b} = S.\frac{dy}{y} = \frac{x}{a}$ par consequent $az = bx$, & $x : z :: a : b$. Ce qui donne cet autre

THEOREME.

Les logarithmes d' un même nombre pris dans deux logarithmiques differentes sont entr'eux comme les soutangentes de ces logarithmiques.

Nous designerons dans la suite le logarithme d' une quantité ou d' un nombre quelconque y par la lettre, L, placée devant ce nombre; ainsi Ly signifiera le logarithme de y.

5.° Si on prend les logarithmes dans une logarithmique dont la foutangente eft l'unité, on aura toujours $Ly = S. \frac{dy}{y}$, c'eft adire que l'intégrale $S. \frac{dy}{y}$ d'une fraction dont le numerateur eft la différentielle du denominateur, eft toujours egale au logarithme du denominateur, en prenant ce logarithme dans la logarithmique dont la foutangente eft l'unité. On a coutume de nommer ces logarithmes *hyperboliques*, pour les diftinguer des logarithmes ordinaires dont la foutangente n'eft point l'unité, mais la fraction decimale 0.43429448. Car dans les tables ordinaires le logarithme de l'unité eft 0, & celui de 10 eft 1; mais dans les logarithmes hyperboliques le logarithme de l'unité eft 0, & le logarithme de 10 eft 2.30258509, que nous defignerons par N. Donc le logarithme hyperbolique de 10, ou N, eft au logarithme ordinaire du même nombre 10, qui eft 1, comme la foutangente de la logarithmique hyperbolique eft a la foutangente de la logarithmique des tables, que nous appellerons M; par ou l'on trouve cette foutangente $M = \frac{1}{N} = 0.43429448$.

6.° Cela pofé on peut toujours trouver par le moyen des tables ordinaires le logarithme hyperbolique d'un nombre donné, que nous appellerons B. on n'a qu'a chercher dans ces tables le logarithme A du nombre donné B, & en fuite le multiplier par N ou par

Fig. 2.

Fig. 3.

Fig. 5.

2.30258509 pour avoir le produit AN, qui ſera le logarithme hyperbolique de B: puiſque la ſoutangente M de la logarithmique des tables eſt a la ſoutangente 1 de la logarithmique hyperbolique, comme A logarithme de B pris dans les tables eſt au logarithme hyperbolique de B, qui ſera par conſequent $\frac{A}{M} = AN$, a cauſe de $M = \frac{1}{N}$. On peut auſſi par la même proportion trouver dans les tables le nombre B qui repond a ſon logarithme hyperbolique donné: car que C ſoit le logarithme hyperbolique du nombre cherché B; on aura la proportion $1 : M :: C : A$, logarithme de B pris dans les tables, qui ſera par conſequent MC, qu'on cherchera dans les tables, & a coté de ce logarithme MC ſe trouvera le nombre B.

7.° Aureſte il eſt facile de demontrer que, ſi dans l' hyperbole equilatere $ECMM'$ (fig. 6.), rapportée aux aſymptotes AD & AP, on ſuppoſe $AB = BC = 1$, l'abſciſſe $AP = x$, l' ordonnée $PM = y$, l'equation $xy = 1$ & parconſequent $y = \frac{1}{x}$, on aura $ydx = \frac{dx}{x}$, & l' aire $CBPM = S.ydx = lx$, en prenant ce logarithme de x dans la logarithmique dont la ſoutangente eſt l' unité, par ou l'on voit que l' invention des logarithmes depend de la quadrature de l' hyperbole.

XXXIII.

THEOREME. L'intégrale de la différentielle $\frac{dx}{a+cx}$ est $\frac{1}{c}.L\left(\frac{a}{c}+x\right)=\frac{1}{c}L\left(\frac{a+cx}{c}\right)$; l'intégrale de la différentielle $\frac{dx}{a-cx}$ est $-\frac{1}{c}\ L.\left(\frac{a-cx}{c}\right)$; & celle de la différentielle, $-\frac{dx}{a+cx}$, ou de $\frac{dx}{-a-cx}$ est $-\frac{1}{c}L\left(\frac{a+cx}{c}\right)$; en prenant les logarithmes hyperboliques.

DEMONSTRATION, 1.° En supposant $\frac{a}{c}+x=z$, on aura $dx=dz$, & $\frac{dx}{a+cx}=\frac{\frac{1}{c}dx}{\frac{a}{c}+x}=\frac{\frac{1}{c}dz}{z}$. Or l'intégrale de $\frac{\frac{1}{c}dz}{z}$ est $\frac{1}{c}\ L.z$ (Art. XXVI. & XVII.) donc l'intégrale de la différentielle $\frac{\frac{1}{c}dx}{\frac{a}{c}+x}$ ou de $\frac{dx}{a+cx}$ est $\frac{1}{c}\ .L$ $\left(\frac{a}{c}+x\right)=\frac{1}{c}.L\left(\frac{a+cx}{c}\right)$.

2.° Deméme en supposant $\frac{a}{c}-x=z$, on aura $dx=-dz$, & $\frac{dx}{a-cx}=\frac{\frac{1}{c}dx}{\frac{a}{c}-x}=-\frac{1}{c}.\frac{dz}{z}$. Or l'intégrale de

$-\frac{1}{c}.\frac{dz}{z}$ eſt $-\frac{1}{c}Lz = -\frac{1}{c}.L\left(\frac{a}{c}-x\right) = -\frac{1}{c}.L$ $\left(\frac{a-cx}{c}\right)$ (Art. XXXII. XXXIII.) donc &c.

3.° Puiſque l'intégrale de $\frac{dx}{a+cx}$ eſt $\frac{1}{c}L.\left(\frac{a+cx}{c}\right)$ par le premier cas, celle de $\frac{-dx}{a+cx}$ doit etre $-\frac{1}{c}L.$ $\left(\frac{a+cx}{c}\right)$ *C. Q. F. D.*

XXXIV.

COROLLAIRE. On peut tirér des deux articles precedents les principes du Calcul exponentiel qui fait une partie importante du calcul intégral.

On appelle quantités exponentielles, celles qui ſont elevées a une puiſſance dont l'expoſant eſt variable : telles ſont les quantités a^x, $a^x y^x$, $a^x + y^x$. Ce calcul ſe reduit aux logarithmes; car ſi les quantités ſont egales, leurs logarithmes doivent etre egaux; ainſi a^x etant ſuppoſé $= b^y$, on aura $L.\ a^x = L.\ b^y$.

Or par la nature des logarithmes $x\ L.a = y\ L.b.$ de même l'equation $a^{x^z} = b^{y^u}$ qui contient des doubles expoſans indeterminés, ſe reduit premierement a $x^z\ L.a = y^u L.b$. & cette derniere a celle-cy, $z\,L.\,x + L.\,L.\,a = u\,L.\,y + L.\,L.\,b$.

On pourra au contraire reduire une equation logarithmique a une equation exponentielle. Ainſi $x L. x = L a$, ſe reduit a $x^x = a$, cette operation s'appelle repaſſér des logarithmes aux nombres. demême ſi on a l' equation $L. y = x$, dans la ſuppoſition de $1 = L. c$, c' eſt adire ſi, c eſt le nombre dont le logarithme eſt l' unité, on aura $L. y = x L. c$; d'ou l' on $y = c^x$ qui eſt l' equation a la logarithmique. (Lem. prec.) dans le quelle $\frac{dy}{y} = dx$, & $Ly = x L. c$.

On voit donc que pour différenciér les quantités exponentielles, il ſuffit de multiplier la quantité même par la différence de ſon logarithme. Ainſi la différence de $c^x = c^x\, dx L. c$. Ce qui eſt evident par la ſubſtitution, en faiſant $c^x = z$, on aura $x L. c = L. z$, & $dx L. c = \frac{dz}{z}$, donc $dz = z\, dx L. c = c^x\, dx L c$. Il peut arrivér que l'expoſant d'une quantité exponentielle ſoit affecté d' un logarithme, mais l'operation n' en ſera pas plus difficile en ſuppoſant que l' expreſſion logarithmique ſoit egale a un ſimple expoſant indeterminé.

Puiſque le calcul intégral eſt l' inverſe du calcul différentiel, il eſt evident qu'on aura l' intégrale d' une différentielle exponentielle en diviſant cette quantité même par la différence de ſon logarithme. Ainſi l' inté-

grale de $x^y dy L.x + x^{y-1} y dx$ eſt x^y; comme il eſt aiſé de s'en aſſurér en différentiant de nouveau. Or la différence du logarithme de x^y eſt $dy L.x + \frac{ydx}{x}$, & diviſant $x^y dy L.x + x^{y-1} y dx = x^y dy Lx + \frac{x^y y dx}{x}$ par, $dy Lx + \frac{ydx}{x}$, on aura au quotient x^y. Il ſera quelquefois plus commode d'employêr les ſubſtitutions. Ainſi dans l'exemple precedent, ſi on fait $x^y = z$, on aura $y L.x = L.z$ & en différenciant, $\frac{ydx}{x} + dy L.x = \frac{dz}{z}$, & en ſubſtituant $x^y dy L.x + \frac{x^y y dx}{x} = dz$, dont l'intégrale $z = x^y$. Il ſuffit d'avoir fait cette remarque qui nous ſervira de principe, lorſque nous ferons dans la ſuite uſage de ce calcul.

XXXV.

THEOREME. L'intégrale de la différentielle $x^m dx$ eſt $\frac{x^{m+1}}{m+1}$ quelque nombre que ſoit l'expoſant m; excepté le cas de $m = -1$ ou de $x^{-1} dx$, dont l'intégrale eſt $L.x$, ou le logarithme hyperbolique de x.

DEMONSTRATION. La différentielle de $\frac{x^{m+1}}{m+1}$ eſt $\frac{\overline{m+1}.x^m dx}{m+1} = x^m dx$ (Art. XXV.) donc $\frac{x^{m+1}}{m+1}$ eſt

l' intégrale de $x^m dx$ (Art. IV.) *C. Q. F. D.*

Il faut en excepter le cas de $m = -1$, ou de $x^{-1} dx = \frac{dx}{x}$, dont l'intégrale eſt $L. x$ (Art. XXVI.)

XXXVI.

Corollaire. 1. Donc on trouve l' intégrale de la différentielle $x^m dx$ en otant dx, pour avoir x^m, en ajoutant l' unité a l' expoſant m pour avoir x^{m+1} & en diviſant x^{m+1} par $m+1$ pour avoir $\frac{x^{m+1}}{m+1}$.

Si a eſt une conſtante, l' intégrale de $ax^m dx$ ſera $\frac{ax^{m+1}}{m+1}$ (Art. XVII.)

XXXVII.

Corollaire. 2. On trouve par la même formule l' intégrale d' une différentielle complexe, comme de $ax^m dx + by^n dy + cz^{-1} dz + \&c.$ pourvu que chaque terme ne referme q'une ſeule variable: il n'ya pour cela qu'a prendre l' intégrale de chaque terme ſuivant la formule; Car la ſomme de toutes ces intégrales ſera l' intégrale de la différentielle complexe (Art. XVIII.) ainſi $\frac{ax^{m+1}}{m+1} + \frac{by^{n+1}}{n+1} + cL. z$ ſera l' intégrale de la différentielle propoſée.

XXXVIII.

XXXVIII.

COROLLAIRE. 3. On trouve encore par la même formule l'intégrale de la différentielle $ax^m dx.(bz^\lambda v^\mu + cy^\nu + \&c.)^\rho$, dans la quelle a, b, c sont des constantes, z, v, y &c. des polynomes quelconques comme $A + Bx^n + Cx^r + \&c.$, dans les quels il n'y a d'autre variable que x & ses puissances, avec les exposans quelconques m, n, r; pourvu que les exposans λ, μ, ν, ρ soient des nombres entiers & positifs; car il est evident qu'avec ces conditions on pourra developpér toutes les puissances z^λ, v^μ, y^ν &c. & en suite la puissance $(bz^\lambda v^\mu + cy^\nu + \&c.)^\rho$ & qu'en multipliant chaque terme par $ax^m dx$, on aura une suite dont tous les termes seront chacun intégrables par la formule du Theoreme, comme dans le Corollaire 2.

XXXIX.

COROLLAIRE. 4. La différentielle $z^m v^n dx$ est intégrable par la même formule, que'lles que soient les variables z, v, x, & les exposans m, n; lorsque son facteur différentiel $v^n dx$ est a la différentielle $z^p dz$ en raison donnée, quelque soit l' exposant p de z^p: car en suppo-

ſant $a : b :: z^p dz : v^n dx$, on aura $v^n dx = \frac{bz^p dz}{a}$, par conſequent $z^m v^n dx = \frac{bz^{p+m} dz}{a}$, dont l' intégrale eſt $\frac{bz^{p+m+1}}{a(p+m+1)}$.

XL.

THEOREME. L'intégrale de la différentielle $dx (a+bx)^m$ eſt $\frac{(a+bx)^{m+1}}{bm+b}$; quelque ſoit l' expoſant m; excepté le cas de $m=-1$. ou de $\frac{dx}{a+bx}$, dont l'intégrale eſt $\frac{1}{b} . L (a+bx)$.

DEMONSTRATION. Suppoſons $a+bx=z$, par conſequent $bdx=dz$, $dx=\frac{dz}{b}$ & $dx (a+bx)^m = \frac{z^m dz}{b}$. Or l'intégrale de $\frac{z^m dz}{b}$ eſt $\frac{z^{m+1}}{b(m+1)}$ par l' Art. XXXV. Donc puiſque $z^{m+1} = (a+bx)^{m+1}$ l' intégrale de la différentielle $dx (a+bx)^m$ ſera $\frac{(a+bx)^{m+1}}{bm+b}$

C. Q. F. D.

Lorſque $m = -1$, on demontre (par l'Art. XXVI.) que l'intégrale de la différentielle $\frac{dx}{a + bx}$ eſt $\frac{1}{b}$ $L.$ $\left(\frac{a+bx}{b}\right)$.

XLI.

THEOREME. Toute différentielle d'une ſeule variable peut etre integrée par la quadrature ſuppoſée d'une courbe, dont on aura l'equation.

DEMONSTRATION. Soit Xdx une différentielle quelconque d'une ſeule variable x, en ſorte que X ſoit une quantite composée comme on voudra de x & de conſtantes. Faites $Xdx = ydx$, ou, $X = y$; & vous aurés $S.Xdx = S.ydx$; or $S.ydx$ eſt l'aire d'une courbe dont l'abſciſſe eſt x & l'ordonnée perpendiculaire y, ou X (Art. VIII.), & dont l'equation eſt $X = y$ donc &c. C. Q. F. D.

TABLE DES FORMULES FONDAMENTALES.

DIFFÉRENTIELLES	INTÉGRALES.
$y\,dx$	aire d'une courbe quelconque dont l'abſciſſe eſt x, l'ordonnée perpendiculaire y.
$\sqrt{dx^2+dy^2}$	arc d'une courbe, abſciſſe x, ordonnée perpendiculaire y.
dx	x ou $x+c$, c conſtante arbitraire, ou determinée par les circoſtances.
$a\,dx$	ax
$\frac{dx}{a}$	$\frac{x}{a}$
$dx+dz+du+$ &c.	$x+z+u+$ &c.
$z\,dx+x\,dz$	xz
$\frac{z\,dx-x\,dz}{zz}$	$\frac{x}{z}$
$\frac{-a\,dx}{xx}$	$\frac{a}{x}$
$\frac{a\,dx}{xx}$	$-\frac{a}{x}$
$x^m\,dx$	$\frac{x^{m+1}}{m+1}$
$x^{-1}\,dx$ ou $\frac{dx}{x}$	$L.x$ ou logarithme hyperbolique de x, $= n\,L.x$ en prenant $L.x$ dans les tables ordinaires & le multipliant par $n = 2.30258509$.
$c^x\,dx\,L.c$	c^x
$x^y\,dy\,L.x + x^{y-1}y\,dx$	x^y.
$(a+bx)^m\,dx$	$\frac{(a+bx)^{m+1}}{b(m+1)}$
$(a+bx)^{-1}.dx$	$\frac{1}{b}.L\left(\frac{a+bx}{b}\right)$ hyperb, ou $\frac{n}{b}L.\left(\frac{a+bx}{b}\right)$ dans les tables.
$X\,dx$	$S.y\,dx$, aire d'une courbe dont l'abſciſſe eſt x l'ordonée y, & l'equation $X=y$ en ſuppoſant X compoſée de x & de conſtantes.

REMARQUE. Nous avons etabli dans ce premier chapitre les principes generaux du Calcul différentiel & intégral, qui doivent nous servir de fondement dans la suite de ce livre. Quoique l'objet de cette premiere partie soit l'intégration des différentielles a une variable, nous avons cependant donné des regles qui appartiennent a des equations d'une ou plusieurs variables. Tels sont par exemple, les Articles XXVII., XXVIII., XXIX., XXX., XXXI. dans lesquels nous avons enseigné a intégrer les equations de cette forme $Adx+Bdy+Cdz$ &c.; mais nous avons traitté ces equations comme si elles ne renfermoient q'une seule variable; il ne sera pas hors de propos d'expliquér cette methode un peu plus au long, ce qui deviendra plus aisé d'aprés les principes precedents.

Si on a $\frac{dA}{dy}=\frac{dB}{dx}$, on a toujours une fonction des deux variables x &, y, la quelle etant différenciée donne $Adx+Bdy$ (Art. cités). Soit F cette fonction & par consequent $dF=Adx+Bdy$; il est evident que Adx sera la différentielle de F, si on considere la seule x comme variable, & Bdy en sera la différentielle, si on considere au contraire, comme variable la seule y. Donc on trouvera, F, si on integre Adx en regardant y comme constante, ou si on intégre Bdy en considérant x, comme constante. On voit donc que toute cette

operation ſe reduit a l'intégration d'une formule différentielle qui ne renfermeroit q'une variable. Il eſt clair par ce que nous venons de dire qu'on peut trouver le valeur de F, de deux manieres, 1.° en regardant une fonction quelconque de y, comme conſtante. 2.° En conſiderant comme conſtante une fonction de x. On aura dans l'un & l'autre cas $F = S.Adx + Y$, & $F = S.Bdy + X$, conſiderant Y, comme une fonction de y, qui ne renferme point de x, & par conſequent comme conſtante, & au contraire X eſt une fonction de x, qui ne contient point de y. Or on determinera aiſement la fonction Y de y, & la fonction X de x, par la comparaiſon des equations $S.Adx + Y = S.Bdy + X$, & F etant l'intégrale de l'equation $Adx + Bdy$; il eſt evident, aiant fait l'intégrale de l'equation $Adx + Bdy = o$, que Y, ſera conſtante & qu'on pourra la determiner.

Soit par exemple l'equation différentielle $2axydx + axxdy - y^3dx - 3xyydy = o$, comparant cette equation avec la forme $Adx + Bdy$, on aura $A = 2axy - y^3$, & $B = axx - 3xyy$, & on trouve dans les ſuppoſitions requiſes $\frac{dA}{dy} = \frac{dB}{dx} = 2ax - 3yy$. Donc en prenant, y, comme conſtante, on aura $S.Adx = axxy - y^3x + Y$; & en prenant de rechef la différentielle en ſuppoſant x conſtante, on aura $axxdy - 3yyxdy + dY = Bdy$, & en

fubftituant a la place de B, fa valeur $axx - 3xyy$, nous trouverons $dY = o$, & par confequent $Y = o$, ou conftante; ainfi la différentielle propofée a pour intégrale $axxy - y^3x$. D' ou l'on voit que pour determiner les fonctions, X, Y qu'on introduit a la place des conftantes, il n'eft pas neceffaire de faire deux intégrations. Quand on a integré une partie comme Adx en confiderant, y, comme conftante, fi on fuppofe l'intégrale $= Q$, on aura $F = Q + Y$, & en différentiant $Q + Y$ dans la fuppofition de, x, conftante, on aura la différentielle Bdy; donc en comparant les deux différentielles, on aura la valeur de Y, & l'intégrale $Q + Y$.

Nous avons fait voir que ces fortes d'equations fe ramenent a celles qui n'ont q'une variable; mais elles ne font pas pour cela toujours intégrables abfolument, elles ne font tres fouvent que conftructibles par les quadratures des courbes; tel eft l'exemple fuivant que nous refoudrons aisément par cette methode & qui auroit pû etre difficile par d'autres voies.

Soit proposée a integrér l'equation $\frac{dx}{x} + \frac{yydx}{x^3} - \frac{ydx}{xx} + \frac{(ydx - xdy)\sqrt{xx+yy}}{x^3} = o$; ou $\left(\frac{1}{x} + \frac{yy}{x^3} + \frac{y\sqrt{xx+yy}}{x^3}\right)dx - \left(\frac{y}{xx} + \frac{x\sqrt{xx+yy}}{x^3}\right)dy = o$; Donc $A = \frac{xx+yy+y\sqrt{xx+yy}}{x^3}$

$B = \frac{-y-\sqrt{xx+yy}}{xx}$. Donc (en ſuppoſant x conſtante) $\frac{dA}{dy} = \frac{2y}{x^3} + \frac{\sqrt{xx+yy}}{x^3} + \frac{yy}{x^3\sqrt{xx+yy}}$ & (en ſuppoſant y conſtante) $\frac{dB}{dx} = \frac{2y}{x^3} + \frac{2\sqrt{xx+yy}}{x^3} - \frac{x}{xx\sqrt{xx+yy}}$. D' ou l' on deduit en reduiſant $\frac{dA}{dy} = \frac{dB}{dx} = \frac{2y}{x^3} + \frac{xx+2yy}{x^3\sqrt{xx+yy}}$. Donc l' intégration ou la conſtruction eſt poſſible.

Cela poſé $S.Adx$ (y ſuppoſée conſtante) $= L.x - \frac{yy}{2xx} + yS.\frac{dx}{x^3}\sqrt{xx+yy}$; Or, ſuppoſant tojours y conſtante, $S.\frac{ydx}{x^3}\sqrt{xx+yy} = -\frac{y\sqrt{xx+yy}}{2xx} + \frac{1}{4}L.\frac{\sqrt{xx+yy}-y}{\sqrt{xx+yy}+y}$ Donc $S.Adx = L.x - \frac{yy}{2xx} - \frac{y\sqrt{xx+yy}}{2xx} + \frac{1}{4}L.\frac{\sqrt{xx+yy}-y}{\sqrt{xx+yy}+y} + Y$; Différentiant maintenant cette intégrale, en ſuppoſant x conſtante, on aura $-\frac{ydy}{xx} - \frac{dy\sqrt{xx+yy}}{2xx} - \frac{yydy}{2xx\sqrt{xx+yy}} - \frac{dy}{2\sqrt{xx+yy}} + dY = Bdy = -\frac{ydy}{xx} - \frac{dy\sqrt{xx+yy}}{xx}$; D' ou l' on deduira en reduiſant

ſant $\frac{-yydy-xxdy}{2xx\sqrt{xx+yy}} + dY = \frac{-yydy-xxdy}{2xx\sqrt{xx+yy}}$; Donc $dY=o$, donc $Y=o$, ou une conſtante. Donc l' intégrale de la différentielle propoſée eſt $L.\,x - \frac{yy}{2xx} - \frac{y\sqrt{xx+yy}}{2xx} + \frac{1}{4}L.\frac{\sqrt{xx+yy}-y}{\sqrt{xx+yy}+y} + o$, ou une conſtante; ſi l'on différencie cette intégrale, on retrouvera la différentielle propoſée.

Il arrive tres ſouvent que l'equation différentielle $Adx+Bdy$, ne donne point l' egalité $\frac{dA}{dy}=\frac{dB}{dx}$, dans lequel cas l'equation $Adx+Bdy$ n' eſt pas intégrable. Il s' agit donc dans ces cas de trouvér un facteur par lequel multipliant $Adx+Bdy$, elle devienne intégrable. Soit ce facteur $=M$, il faut que $MAdx + MBdy$ ſoit la différentielle de quelque fonction de x, de y, & de quelque conſtante; donc (par l'Art. XXVIII.) la différence de MA, y variant, eſt la même que celle de MB, x variant, c'eſt a dire $\frac{d.MA}{dy}=\frac{d.MB}{dx}$ ou bien $\frac{MdA}{dy}+\frac{AdM}{dy}-\frac{MdB}{dx}-\frac{BdM}{dx}=o$: il faudra donc par la methode precedente conſiderer y comme conſtante & cherchér dans cette ſuppoſition l' intégrale $S.\,MAdx$ a laquelle ajoutant une fonction Y de y & en différen-

ciant de nouveau $S.MAdx$, confiderant x comme conftante, on trouve $MBdy$ & alors on aura l'intégrale comme dans le 1.er cas.

Toute la difficulté confifte a trouvér la forme generale de la fonction M, telle qu'on puiffe, par la methode des indeterminées reduìre l'equation a etre celle qui fatisfaffe a la condition d'intégrabilité, c'eft adire, qui rende egales les deux intégrales, $S.MAdx$, $S.MBdy$, la 1.re en fuppofant y conftante, la feconde en fuppofant x conftante. Nous expliquerons cette methode dans la fuite; les cas particuliers donnent fouvent des moïens tres fimples de trouver la fonction qui convient pour refoudre l'equation; mais il fuffit davoir demontré le theoreme fondamental. Nous nous contenterons d'obfervér que fi on a trouvé un facteur M, qui rende la formule $Adx+Bdy$ intégrable, on pourra trouver une infinité d'autres facteurs qui la rendront pareillement intégrable. Car foit z l'intégrale de M $(Adx+Bdy)$. Ou $dz = M\ (Adx+Bdy)$, & foit de plus Z une fonction quelconque de z, la différentielle $Zdz = MZ\ (Adx+Bdy)$ fera auffi intégrable. Donc ayant trouvè un facteur quelconque M, qui rende intégrable la formule $Adx+Bdy$ on pourra trouvér une infinité d'autres facteurs MZ, qui rempliront les mêmes conditions, en prenant pour Z, une fonction quelconque de l'intégrale $S.\ M\ (Adx+Bdy)$. Nous nous contenterons d'en donner un exemple.

Soit l' equation différentielle $a x^{m-1} y^{n} dx + b x^{m} y^{n-1} dy$, dans la quelle nous chercherons les facteurs qui la rendent intégrable, on voit qu'un de ces facteurs est $\frac{1}{x^{m} y^{n}}$; qui satisfait a la premiere condition, ce qui donne $dz = \frac{a\,dx}{x} + \frac{b\,dy}{y}$, & en intégrant $z = a L.x + b L.y = L.x^{a} y^{b}$ (XXXIV.) maintenant soit Z une fonction quelconque de $x^{a} y^{b}$ les facteurs seront renfermés dans cette expression generale $\frac{Z}{x^{m} y^{n}} = \frac{1}{x^{m} y^{n}} \times x^{a} y^{b}$. Si au lieu de cette fonction on prenoit une puissauce quelconque $x^{ar} y^{bs}$, on auroit une infinité d' autres facteurs $\frac{x^{ar} y^{bs}}{x^{m} y^{n}} = x^{ar-m} y^{bs-n}$. Mais cela suffit sur cette matiere que nous reprendrons fort au long, lors que nous traitterons des equations a plusieurs variables; nous allons considerér dans le Chapitre suivant quelques equations différentielles qui nous feront dans la suite d' une grande utilité.



CHAPITRE II.

Des cas les plus simples dans lesquels on trouve absolument, ou par les tables des logarithmes & des sinus l'intégrale de la différentielle $z^q dz(a+bz^p+cz^{2p})^m$.

XLII.

LEMME. Si on suppose $z^p = x$ la différentielle proposée se reduira a celle-ci $\frac{1}{p} x^{\frac{q+1}{p}-1} dx(a+bx+cx^2)^m = \frac{1}{p} x^n dx(a+bx+cx^2)^m$ en faisant $\frac{q+1}{p}-1=n$. Car si $z^p = x$, on aura $z=x^{\frac{1}{p}}$, $z^{2p}=x^2$, $dz=\frac{1}{p}x^{\frac{1}{p}-1}dx$, $z^q=x^{\frac{q}{p}}$; $z^q dz=\frac{1}{p}x^{\frac{q+1}{p}-1}dx$; & $z^q dz(a+bz^p+cz^{2p})^m = \frac{1}{p}x^{\frac{q+1}{p}-1}dx(a+bx+cx^2)^m = \frac{1}{p}x^n dx(a+bx+cx^2)^m$. Et comme $\frac{1}{p}$ est une constante, il suffira de cherchér l'intégrale de la différentielle $x^n dx(a+bx+cx^2)^m$. (Art. XVII.)

XLIII.

LEMME. Il faut diftinguer quatre cas dans la différentielle $x^n dx(a+bx+cx^2)^m$. Le 1.er Lorfque $c=o$, ou que la différentielle eft $x^n dx(a+bx)^m$. Le 2.e cas lorfque $b=o$, ou que la différentielle eft $x^n dx(a+cx^2)^m$. Le 3.e cas lorfque $a=o$, & la différentielle $x^n\ dx\ (bx+cx^2)^m$. Le 4.e cas lorfqu' aucune des conftantes a, b, c n'eft egale a o; Nous ne parlons pas d' un cinquieme cas, dans le quel deux des trois conftantes a, b, c font fupposées egales a o, par ce qu'alors la différentielle propofée prend la forme de celle qu'on intégre toujours abfolument, ou par les logarithmes (par l' Art. XL.). Nous ometrons auffi le cas, ou l'expofant m eft un nombre entier pofitif, parceque dans ce cas on trouve auffi l'intégrale de la différentielle par l'Article XL.

XLIV.

LEMME. *Pour preparer a l'ufage des tables des finus dans le calcul intégral.*

1.o On fcait que tous les cercles etant femblables, leurs lignes homologues, droites ou courbes, comme les arcs d'un même nombre de degrés & minutes, & leurs finus, cofinus, tangentes, fecantes &c. font en mê-

me raiſon que les raions de ces cercles; de ſorte que ſi on nomme R le ſinus total ou le rayon du cercle des tables, qui eſt ordinairement 10000000000. r le rayon d'un cercle quelconque, X & x les lignes homologues priſes dans ces deux cercles; on aura cette proportion $R:r::X:x$, d'ou l'on tire $Rx = rX$, $x = \frac{rX}{R}$ & $X = \frac{Rx}{r}$. Par conſequent ſi on connoit x dans le Cercle dont le rayon eſt r, on trouvera ſa valeur dans les tables ou dans le cercle dont le rayon eſt R; & ſi on connoit X par les tables, on trouvera la valeur de x priſe dans le cercle dont le rayon eſt r. Par exemple ſi x eſt le ſinus d'un arc d'un nombre de degrez exprimé par N.° & qu'on connoiſſe ce ſinus pris dans le cercle dont le raion eſt r, on trouvera le nombre N.° en cherchant dans les tables un ſinus $= \frac{Rx}{r}$, qui ſera le ſinus X, a coté du quel on trouvera le nombre des degrés & minutes N.°

2.° Si on a beſoin de trouver dans le cercle dont le rayon eſt r, la longueur d'un arc S d'un nombre donné de degrés N.°; on cherchera d'abord la circonference c de ce cercle par une des raiſons trouvées entre le rayon & la circonférence du cercle en general, comme par la raiſon de 113. a 355., ou par une autre

raiſon encore plus exacte; & on fera enſuite cette proportion $360^\circ : N.^\circ :: c : s = \frac{N.^\circ c}{360^\circ}$.

3.° Si on ſuppoſe que le rayon $r = 1$; aulieu de la proportion $R : r :: X : x$, on aura celle-ci $R : 1 :: X : x$, d'ou l'on tire l'equation $X = Rx$, & en ſubſtituant la valeur de R priſe dans les tables des ſinus, qui eſt ordinairement 10000000000., on aura $X = 10000000000\,x$, & $x = \frac{X}{10000000000} = 0.000000000\,1.X$; & ſi on ſuppoſe que le rayon des tables eſt 1 ou 1. 0000000000, on aura $x = X$.

4.° Si on nomme u l'angle dont la meſure eſt l'arc s pris dans le cercle au rayon r, on aura $u = \frac{s}{r}$, $ru = s$ & ſi le rayon $r = 1$, on aura $u = s$. Venons preſentement aux différens Cas de la différentielle $x^n dx (a + bx + cx^2)^m$.

XLV.

I. Cas, $x^n\ dx\ (a + bx)^m$.

1.° Lorſque l'expoſant $n = o$, ou que la différentielle devient $dx\ (a + bx)^m$ on trouve ſon intégrale $= \frac{(a+bx)^{m+1}}{bm+b}$, quelque nombre que ſoit l'expoſant m; excepté le cas de $m = -1$ qui donne l'intégrale $\frac{1}{b}\ L. \left(\frac{a+bx}{b}\right)$ (Art. XL.)

2.° En faisant $a+bx=y$ on aura $x=\frac{1}{b}(y-a)$, $dx=\frac{1}{b}dy$, $(a+bx)^m=y^m$, $x^n=\frac{1}{b^n}(y-a)^n$; & la différentielle $x^n dx\,(a+bx)^m=\frac{1}{b^{n+1}}y^m dy.(y-a)^n$; dont on trouvera l'intégrale absolument ou par les logarithmes, quelque nombre que soit l'exposant m, pourvû que n soit un nombre entier positif (Art. XXXVIII.). Donc la différentielle $x^n dx(a+bx)^m$ est intégrable absolument ou par les tables des logarithmes, lorsque l'un des deux exposans n & m est un nombre entier positif, ou o, quelque soit l'autre exposant.

XLVI.

II. Cas, $x^n dx(a+cx^2)^m$.

1.° On reduit ce 2.e cas au premier en faisant $x^2=z$, d'où l'on tire $x=z^{\frac{1}{2}}$, $dx=\frac{1}{2}z^{\frac{-1}{2}}dz$, $x^n=z^{\frac{n}{2}}$, $x^n dx=\frac{1}{2}z^{\frac{n-1}{2}}dz$, & $x^n dx(a+cx^2)^m=\frac{1}{2}z^{\frac{n-1}{2}}dz\,(a+cz)^m$.

2.° Donc la différentielle $x^n dx(a+cx^2)^m$ est intégrable absolument ou par les logarithmes, lorsque des deux exposans m, & $\frac{n-1}{2}$. l'un est un nombre entier positif

positif ou zero, & l' autre un nombre quelconque (Art. XLV.) Or $\frac{n-1}{2}$ est un nombre entier positif ou zero, lorsque n est un des nombres impairs 1, 3, 5, 7, 9, &c.

3.° En supposant $a+cz=y$, ou $a+cx^2=y$, & en substituant c au lieu de b, & $\frac{n-1}{2}$ au lieu de n dans la différentielle $\frac{1}{b^{n+1}} y^m dy\,(y-a)^n$ on trouvera $\frac{1}{2c^{\frac{n+1}{2}}} y^m dy (y-a)^{\frac{n-1}{2}} = \frac{1}{2} z^{\frac{n-1}{2}} dz\,(a+cz)^m = x^n dx (a+cx^2)^m$.

XLVII.

III. Cas. $x^n dx\,(bx+cxx)^m$.

1.° Ce 3.e Cas se reduit aussi au premier en observant que $bx+cx^2=x(b+cx)$, & $(bx+cx^2)^m=x^m (b+cx)^m$; par consequent $x^n dx (bx+cx^2)^m=x^{n+m}dx (b+cx)^m$. D'ou l'on conclut, comme dans l' Article XLV., que la différentielle proposée est intégrable absolument ou par les logarithmes, lorsque l' un des deux exposans m, & $m+n$, est un nombre entier positif ou zero, & l'autre un nombre quelconque.

2°. En faisant $b+cx=y$, & en substituant b au lieu de a, c au lieu de b, & $n+m$ au lieu de n dans la différentielle $\frac{1}{b^{n+1}}y^m dy\,(y-a)^n$, on aura $\frac{1}{c^{n+m+1}}y^m dy\,(y-b)^{n+m}=x^n\,dx\,(bx+cxx)^m$.

XLVIII.

IV. Cas. $x^n\,dx\,(a+bx+cxx)^m$

Cette différentielle, lorsque $n=o$, peut toujours se reduire aux cas precedens, quelque soit l' exposant m, car $a+bx+cx^2=c\left(\frac{a}{c}+\frac{bx}{c}+xx\right)$ & $dx\,(a+bx+cx^2)^m=c^m dx\,\left(\frac{a}{c}+\frac{bx}{c}+xx\right)^m$ lorsque c est positif; & $dx\,(a+bx-cxx)^m=c^m dx\left(\frac{a}{c}+\frac{bx}{c}-xx\right)^m$. Or en faisant $x^2+\frac{bx}{c}+\frac{bb}{4cc}=zz$, ou $x+\frac{b}{2c}=z$, on a $x=z-\frac{b}{2c}$, $dx=dz$, $xx+\frac{bx}{c}=zz-\frac{bb}{4cc}$, $xx+\frac{bx}{c}+\frac{a}{c}=zz+\frac{a}{c}-\frac{bb}{4cc}$, & $dx\,(a+bx+cxx)^m=c^m dx\,\left(\frac{a}{c}+\frac{bx}{c}+xx\right)^m=c^m dz\left(zz+\frac{a}{c}-\frac{bb}{4cc}\right)^m$, qui est une différentielle du second cas. On reduit de la même maniere la différentielle $dx\,(a+bx-cxx)^m$, ou $c^m dx \times \left(\frac{a}{c}+\frac{bx}{c}-xx\right)^m$ au second cas, en faisant $xx-\frac{bx}{c}+$

$\frac{bb}{4cc} = zz$, ou $x - \frac{b}{2c} = z$; d'on l'on tire $dx = dz$, $xx - \frac{bx}{c} = zz - \frac{bb}{4cc}$, $xx - \frac{bx}{c} - \frac{a}{c} = zz - \frac{bb}{4cc} - \frac{a}{c}$, $\frac{a}{c} + \frac{bx}{c} - xx = \frac{a}{c} + \frac{bb}{4cc} - zz$, & $c^m dx\left(\frac{a}{c} + \frac{bx}{c} - xx\right)^m = c^m dz\left(\frac{a}{c} + \frac{bb}{4cc} - zz\right)^m$ différentiele du 2.e Cas. Si on suppose $\frac{b}{2c} - x = z$ on aura $dx = -dz$, & $c^m\ dx \left(\frac{a}{c} + \frac{bx}{c} - xx\right)^m = -c^m\ dz\left(\frac{a}{c} + \frac{b^2}{4cc} - zz\right)^m$.

Nous allons donc etablir les Theoremes fondamentaux pour intégrer la différentielle $x^n\,dx\,(a + bx + cxx)^m$ dans les deux premiers Cas.

XLIX.

THEOREME. $S.\ \frac{xdx}{a+bx} = \frac{1}{b^2}(a+bx) - \frac{a}{b^2}L.\ (a+bx)$; $S.xdx(a+bx)^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{5b^2}\cdot(a+bx)^{\frac{5}{2}} - \frac{2a}{3b^2}\cdot(a+bx)^{\frac{3}{2}}$; $S.\frac{xdx}{(a+bx)^{\frac{1}{2}}} = \frac{2}{3b^2}\cdot(a+bx)^{\frac{3}{2}} - \frac{2a}{b^2}\cdot(a+bx)^{\frac{1}{2}}$.

On trouve ces intégrales en faisant $a+bx=y$, & en substituant dans la différentielle $\frac{1}{b^{n+1}}y^m dy(y-a)^n$, 1 au lieu de n, & -1, ou $+\frac{1}{2}$, ou $-\frac{1}{2}$ au lieu de m. & on demontre aussi le Theoreme en prenant les différentielles des intégrales proposées. Par exemple la différentielle $\frac{x\,dx}{a+bx}$ en faisant $a+bx=y$, & $n=1$, & $m=-1$ dans $\frac{1}{b^{n+1}}y^m dy(y-a)^n$, devient $\frac{1}{b^2}y^{-1}dy(y-a)$ $=\frac{1}{b^2}dy-\frac{a}{b^2}\cdot\frac{dy}{y}$, dont l' intégrale est $\frac{1}{b^2}y-\frac{a}{b^2}L.y=$ $\frac{1}{b^2}(a+bx)-\frac{a}{b^2}L(a+bx)$. Et si on prend la différentielle de cette intégrale, on trouve qu'elle est $\frac{1}{b^2}\cdot$ $bdx-\frac{a}{b^2}\cdot\frac{bdx}{a+bx}=\frac{dx}{b}-\frac{adx}{b(a+bx)}=\frac{adx+bxdx-adx}{b(a+bx)}=$ $\frac{x\,dx}{a+bx}$.

L.

COROLLAIRE. On trouve de la même maniere que $S.\ \frac{dx}{a+bx}=\frac{1}{b}\ L\ (a+bx)$, $S.\ dx(a+bx)^{\frac{1}{2}}=\frac{2}{3b}$

$(a+bx)^{\frac{3}{2}}$, & $S. \frac{dx}{(a+bx)^{\frac{1}{2}}} = \frac{2}{b}(a+bx)^{\frac{1}{2}}$

LI.

THEOREME. 1.° $S. \frac{dx}{x(a+bx)} = \frac{1}{a}. L. \left(\frac{bx}{a+bx}\right)$

2.° $S. \frac{dx}{x}(a+bx)^{\frac{1}{2}} = 2(a+bx)^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{2}} L. \left(\frac{\overline{a+bx}^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{1}{2}}}{\overline{a+bx}^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{2}}}\right)$

3.° $S. \frac{dx}{x(a+bx)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{a^{\frac{1}{2}}}. L. \left(\frac{\overline{a+bx}^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{1}{2}}}{\overline{a+bx}^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{2}}}\right)$

On demontre ce Theoreme comme le precedent, en prenant les différentielles de part & d'autre du figne $=$, & en faifant $a+bx=y$. Car. 1.° la différentielle $\frac{dx}{x(a+bx)}$ en faifant $a+bx=y$ & en fubftituant -1 au lieu de m & de n dans la formule $\frac{1}{b^{n+1}} y^m dy (y-a)^n$ fe change en celleci $\frac{dy}{y(y-a)} = \frac{\frac{1}{a}dy}{y-a} - \frac{\frac{1}{a}dy}{y}$, dont l'intégrale eft $\frac{1}{a} L. (y-a) - \frac{1}{a} Ly = \frac{1}{a} L \left(\frac{y-a}{y}\right) = \frac{1}{a}. L \left(\frac{bx}{a+bx}\right)$.

2.° La différentielle $\frac{dx}{x}(a+bx)^{\frac{1}{2}}$, en suppofant $a+bx=uu$ fe change en $\frac{2uudu}{uu-a}=2du+\frac{2adu}{uu-a}=$ $2du-\frac{a^{\frac{1}{2}}du}{u+a^{\frac{1}{2}}}+\frac{a^{\frac{1}{2}}du}{u-a^{\frac{1}{2}}}$, dont l'intégrale eft $2u+a^{\frac{1}{2}}$ $L(u-a^{\frac{1}{2}})-a^{\frac{1}{2}}L(u+a^{\frac{1}{2}})=2(a+bx)^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{2}}L$ $\left(\frac{\overline{a+bx}^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{2}}}{\overline{a+bx}^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{2}}}\right)$. Il faut que $+a$ foit une quantité pofitive.

3.e La différentielle $\frac{dx}{x(a+bx)^{\frac{1}{2}}}$ en faifant $a+bx=uu$ devient $\frac{2du}{uu-a}=\frac{\frac{1}{a^{\frac{1}{2}}}du}{u-a^{\frac{1}{2}}}-\frac{\frac{1}{a^{\frac{1}{2}}}du}{u+a^{\frac{1}{2}}}$, dont l'intégrale eft $\frac{1}{a^{\frac{1}{2}}}L.(u-a^{\frac{1}{2}})-\frac{1}{a^{\frac{1}{2}}}L(u+a^{\frac{1}{2}})=\frac{1}{a^{\frac{1}{2}}}L$ $\left(\frac{u-a^{\frac{1}{2}}}{u+a^{\frac{1}{2}}}\right)=\frac{1}{a^{\frac{1}{2}}}L.\left(\frac{\overline{a+bx}^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{2}}}{\overline{a+bx}^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{2}}}\right)$. Cette intégrale fuppofe auffi que a eft une grandeur pofitive.

LII.

THEOREME. $S\frac{dx}{a+cxx}=\frac{s}{a}$, s etant l' arc d' un cercle dont la tangente est x, & le rayon. $\sqrt{\frac{a}{c}}$.

DEMONSTRATION. Soit (fig. 7.) ABC un quart de cercle dont le centre est C, le rayon $CA=\sqrt{\frac{a}{c}}$, l' arc $AM=s$, la tangente $AT=x$, $MM'=ds$, $TT'=dx$. En supposant TR perpendiculaire sur CT', les triangles semblables CMM' & CTR donnent cette proportion $CT : CM$ ou $CA :: TR : MM'$, & les triangles semblables $T'RT$ & CAT celleci $CT : CA :: TT' : TR$ donc par composition de raisons on aura $CT^2 : CA^2 :: TT' : MM'$. Or $CT^2=\frac{a}{c}+xx$, $CA^2=\frac{a}{c}$, $TT'=dx$, & $MM'=ds$. Donc $\frac{a}{c}+xx : \frac{a}{c} :: a+cxx : a :: dx : ds=\frac{adx}{a+cxx}$; $\frac{ds}{a}=\frac{dx}{a+cxx}$, & $\frac{s}{a}=S\frac{dx}{a+cxx}$. *C. Q. F. D.*

LIII.

COROLLAIRE. Si on suppose que le rayon du cercle soit 1, s un arc ou un angle u pris dans ce cercle on

aura $s = u = S.\frac{dx}{1+xx}$, x etant la tangente de l'arc s ou de l'angle u. Car en ſuppoſant $a = 1$, & $c = 1$ & $u = a$ l'arc s diviſé par ſon rayon 1, on a $\frac{s}{a} = s = u = S\frac{dx}{a+cxx} = S.\frac{dx}{1+xx}$.

LIV.

THEOREME. $S\frac{xdx}{a+cxx} = \frac{1}{2c}L\left(\frac{a+cxx}{c}\right) = \frac{1}{c}L\left(\frac{\overline{a+cxx}^{\frac{1}{2}}}{c^{\frac{1}{2}}}\right)$.

DEMONSTRATION. En ſuppoſant $xx = y$, on a $xdx = \frac{1}{2}dy$, $a+cxx = a+cy$, & $\frac{xdx}{a+cxx} = \frac{\frac{1}{2}dy}{a+cy} = \frac{1}{2c}.\frac{dy}{\frac{a}{c}+y}$ dont l'intégrale eſt $\frac{1}{2c}.L\left(\frac{a}{c}+y\right) = \frac{1}{2c}L\left(\frac{a+cy}{c}\right) = \frac{1}{2c}L\left(\frac{a+cxx}{c}\right) = \frac{1}{c}L\left(\frac{\overline{a+cxx}^{\frac{1}{2}}}{c^{\frac{1}{2}}}\right)$ C.Q.F.D.

LV.

THEOREME. $S\frac{dx}{x(a+cxx)} = \frac{1}{a}L\left(\frac{x\sqrt{c}}{\sqrt{a+cxx}}\right)$.

DEMON-

DEMONSTRATION. $\frac{dx}{x(a+cxx)} = \frac{\frac{1}{a}dx}{x} - \frac{\frac{1}{a}xdx}{\frac{a}{c}+xx}$. Or $S\,\frac{\frac{1}{a}dx}{x} = \frac{1}{a}\,Lx$, & $S\,\frac{\frac{1}{a}\,xdx}{\frac{a}{c}+xx} = \frac{1}{a}\,S\,\frac{xdx}{\frac{a}{c}+xx} = \frac{1}{a}\,S\,\frac{cxdx}{a+cxx} = \frac{c}{a}\,S\,\frac{xdx}{a+cxx}$, & par le Theoreme precedent $S.\frac{xdx}{a+cxx} = \frac{1}{c}\,L\,\frac{\sqrt{a+cxx}}{c}$. donc $S\,\frac{\frac{1}{a}xdx}{\frac{a}{c}+xx} = \frac{1}{a}\,L\,\frac{\sqrt{a+cxx}}{c}$. par consequent $S.\,\frac{dx}{x(a+cxx)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{a}\,Lx - \frac{1}{a}\,L\frac{\sqrt{a+cxx}}{c} = \frac{1}{a}\,L.\,\frac{c^{\frac{1}{2}}x}{\sqrt{a+cxx}}$. *C. Q. F. D.*

LVI.

THEOREME. 1.° $S.\ xdx(a+cxx)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3c}(a+cx^2)^{\frac{3}{2}}$; 2.° $S\,\frac{xdx}{(a+cxx)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{c}\,(a+cxx)^{\frac{1}{2}}$. 3.° $S\,dx(a+cx^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{aa}{8c^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{\frac{a}{c}+xx}-x\right)^2} - \frac{1}{8}c^{\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\frac{a}{c}+xx}-x\right)^2 - \frac{a}{2c^{\frac{1}{2}}}\,L.\left(\sqrt{\frac{a}{c}+xx}-x\right)$. 4.° $S.\,\frac{dx}{(a+cx^2)^{\frac{1}{2}}} = -\frac{1}{c^{\frac{1}{2}}}\,L.\left(\sqrt{\frac{a}{c}+xx}-x\right)$.

DEMONSTRATION. La premiere & la seconde equation se demontrent facilement en prenant les différentielles de part & d'autre du signe d'egalité.

Pour demontrer la 3e, & la 4me, Nous remarquerons d'abord que $(a+cx^2)^{\frac{1}{2}} = c^{\frac{1}{2}}\left(\frac{a}{c}+x^2\right)^{\frac{1}{2}} = c^{\frac{1}{2}}\ (f+x^2)^{\frac{1}{2}}$ en mettant f au lieu de $\frac{a}{c}$. En supposant $x^2+f = x^2+2zx+zz$, ou $(f+xx)^{\frac{1}{2}} = x+z$ on aura $\frac{f-zz}{2z} = x$, $x+z = \frac{f+zz}{2z}$, & $dx = -dz\frac{(f+zz)}{2zz}$. Donc la 4.me différentielle $\frac{dx}{(a+cxx)^{\frac{1}{2}}} = \frac{dx}{c^{\frac{1}{2}}\left(\frac{a}{c}+x^2\right)^{\frac{1}{2}}}$ deviendra $-\frac{1}{c^{\frac{1}{2}}}dz\frac{(f+zz)}{2zz}\times\frac{2z}{f+zz} = -\frac{1}{c^{\frac{1}{2}}}\frac{dz}{z}$, dont l'intégrale est $-\frac{1}{c^{\frac{1}{2}}}L.z = -\frac{1}{c^{\frac{1}{2}}}L.\left(\sqrt{\frac{a}{c}+xx}-x\right)$.

La 3.me différentielle $dx(a+cxx)^{\frac{1}{2}} = c^{\frac{1}{2}}dx\left(\frac{a}{c}+xx\right)^{\frac{1}{2}} = c^{\frac{1}{2}}dx\ (f+xx)^{\frac{1}{2}}$; & $S.\ dx\ (a+cxx)^{\frac{1}{2}} = c^{\frac{1}{2}}\ Sdx(f+xx)^{\frac{1}{2}}$. Or $dx\ (f+xx)^{\frac{1}{2}} = -dz$

$\left(\frac{f+zz}{2zz}\right) \times \left(\frac{f+zz}{2z}\right) = - \frac{dz(f+zz)^2}{4z^3} = -$

$\frac{z^4 dz - 2fzzdz - ffdz}{4z^3} = -\frac{1}{4} zdz - \frac{\frac{1}{2}fdz}{z} - \frac{1}{4} ff z^{-3}$

dz, dont l'intégrale est $-\frac{1}{8} zz - \frac{1}{2} f L.z + \frac{1}{8} \frac{ff}{zz}$

par consequent $S.dx(a+cx^2)^{\frac{1}{2}}$ ou $c^{\frac{1}{2}} S.\, dx\left(\frac{a}{c}+xx\right)^{\frac{1}{2}}$

$= -\frac{c^{\frac{1}{2}}}{8} zz - \frac{c^{\frac{1}{2}}}{2} f L.z + \frac{c^{\frac{1}{2}}}{8} \cdot \frac{ff}{zz} = \frac{aa}{8c^{\frac{3}{2}} zz} - \frac{1}{8} c^{\frac{1}{2}}$

$zz - \frac{a}{2c^{\frac{1}{2}}} L.z$, & en remettant $\sqrt{\frac{a}{c}+xx} - x$ au lieu

de z on aura $S.dx(a+cxx)^{\frac{1}{2}} = \frac{aa}{8c^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{\frac{a}{c}+xx}-x\right)^2}$

$-\frac{1}{8} c^{\frac{1}{2}} \left(\sqrt{\frac{a}{c}+xx}-x\right)^2 - \frac{a}{2c^{\frac{1}{2}}} L.\left(\sqrt{\frac{a}{c}+xx}-x\right).$

C. Q. F. D.

LVII.

THEOREME. $S \frac{dx}{\sqrt{a-cxx}} = \frac{s}{\sqrt{a}}$, s etant un arc de cercle, dont le sinus est x, & le rayon $\sqrt{\frac{a}{c}}$.

DEMONSTRATION. Soit (dans la même fig. 7.) le rayon $CA = \sqrt{\frac{a}{c}}$, l'arc $BM = s$, son sinus $QM = x$, $MN = dx$, $M'M = ds$; on aura $QC = \sqrt{\frac{a}{c} - xx}$, & à cause des triangles semblables $M'NM$ & CQM, $CQ : CM :: MN : MM'$, ou $\sqrt{\frac{a}{c} - xx} : \sqrt{\frac{a}{c}} ::$

$$dx : ds = \frac{dx\sqrt{\frac{a}{c}}}{\sqrt{\frac{a}{c} - xx}} = \frac{dx\sqrt{a}}{\sqrt{a - cxx}}, \ \& \ \frac{ds}{\sqrt{a}} = \frac{dx}{\sqrt{a - cxx}}.$$

C. Q. F. D.

LVIII.

COROLLAIRE $S. \frac{dx}{\sqrt{1 - xx}} = s$, s étant un arc ou un angle dont le sinus est x, & le rayon du cercle 1. car en substituant 1 au lieu de c, & de a, dans l'equation $S. \frac{dx}{\sqrt{a - cxx}} = \frac{s}{\sqrt{a}}$, elle devient $S \frac{dx}{\sqrt{1 - xx}} = s$; & $\sqrt{\frac{a}{c}} = 1$.

LIX.

THEOREME. L'intégrale de la différentielle $\frac{-dx}{\sqrt{a - cxx}}$ est $\frac{s}{\sqrt{a}}$; s etant un arc dont le cosinus est x, & le rayon $\sqrt{\frac{a}{c}}$.

DEMONSTRATION. Soit (même fig. 7.) $CA = \sqrt{\frac{a}{c}}$, $BM = s$, $M'M = ds$, le cosinus de BM ou $PM = x$. parceque l'arc BM croissant & devenant $s + ds$, son cosinus x decroit & devient $x - dx$, on aura $M'N = -dx$; & a cause des triangles semblables $PC\left(\sqrt{\frac{a}{c} - xx}\right)$: $CM\left(\sqrt{\frac{a}{c}}\right)$ :: $M'N\,(-dx)$: $M'M\,(ds)$, ou $\sqrt{a - cxx} : \sqrt{a} :: -dx : ds = \frac{-dx\sqrt{a}}{\sqrt{a - cxx}}$, par consequent $\frac{ds}{\sqrt{a}} = -\frac{dx}{\sqrt{a - cxx}}$; & $\frac{s}{\sqrt{a}} = S.\frac{-dx}{\sqrt{a - cxx}}$: C.Q.F.D.

LX.

COROLLAIRE. $S.\frac{-dx}{\sqrt{1 - xx}} = s$, s etant un arc ou un angle dont le cosinus est x, & le rayon du cercle $= 1$; puisque $\frac{-dx}{\sqrt{a - cxx}} = \frac{-dx}{\sqrt{1 - xx}}$, en supposant $c = a = 1$, & par consequent $\sqrt{\frac{a}{c}} = 1$.

LXI.

THEOREME. $S.\frac{dx}{x\sqrt{cxx - a}} = \frac{s\sqrt{c}}{a}$; s etant un arc de cercle, dont la secante est x, & le rayon $\sqrt{\frac{a}{c}}$.

DEMONSTRATION. Soit (même fig. 7.) l'arc $AM = s$, la secante $CT = x$, $RT' = dx$ la tangente $AT = \sqrt{xx - \frac{a}{c}}$, $MM' = ds$. les triangles semblables CMM' & CTR donnent cette proportion, $CM \left(\sqrt{\frac{a}{c}}\right) : CT(x) :: MM'(ds) : TR = \frac{xds}{\sqrt{\frac{a}{c}}}$;& les triangles semblables $T'RT$ & TAC donnent celle-ci $CA \left(\sqrt{\frac{a}{c}}\right) : TA\left(\sqrt{xx - \frac{a}{c}}\right) :: TR \left(\frac{xds}{\sqrt{\frac{a}{c}}}\right) :$ $T'R\ (dx)$; ou $\frac{a}{c} : \frac{\sqrt{cxx-a}}{c^{\frac{1}{2}}} :: \frac{a}{\sqrt{c}} : \sqrt{cxx-a} ::$ $xds : dx$. donc $dx\left(\frac{a}{\sqrt{c}}\right) = ds\ (x\sqrt{cxx-a})$ & $ds\frac{\sqrt{c}}{a} = \frac{dx}{x\sqrt{cxx-a}}$, & $\frac{s\sqrt{c}}{a} = S.\frac{dx}{x\sqrt{cxx-a}}$. *C. Q. F. D.*

LXII.

COROLLAIRE. $S. \frac{dx}{x\sqrt{xx-1}} = s$, arc de cercle dont la secante est x, & le rayon 1. on le prouve en faisant $a = c = 1$, par consequent $\sqrt{\frac{a}{c}} = 1$.

LXIII.

THEOREME. $S. \frac{dx}{x\sqrt{a+cxx}} = \frac{1}{2\sqrt{a}} . L. \left(\frac{\sqrt{a+cxx}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+cxx}+\sqrt{a}}\right)$.

DEMONSTRATION. $\frac{dx}{x\sqrt{a+cxx}} = \frac{xdx}{xx\sqrt{a+cxx}}$ $= \frac{1}{c^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{xdx}{xx\sqrt{\frac{a}{c}+xx}}$. or en ſuppoſant $\frac{a}{c} = ff$ & $\overline{ff+xx}^{\frac{1}{2}} = f+z$ ou $z = \sqrt{ff+xx} - f$ on trouve $ff+x^2 = ff+2fz+zz$, $xx = 2fz+zz$, $xdx = dz(f+z)$, $\frac{xdx}{xx} = \frac{dz(f+z)}{2fz+zz}$, $\frac{xdx}{xx(ff+xx)^{\frac{1}{2}}}$ $= \frac{dz}{2fz+zz} = \frac{\frac{1}{2f}dz}{z} - \frac{\frac{1}{2f}dz}{z+2f}$, dont l'intégrale eſt $\frac{1}{2f} . Lz - \frac{1}{2f} L. (z+2f) = \frac{1}{2f} . L\left(\frac{z}{z+2f}\right)$ $= \frac{1}{2f} L. \left(\frac{\sqrt{ff+xx}-f}{\sqrt{ff+xx}+f}\right)$ par conſequent $\frac{1}{c^{\frac{1}{2}}} S.$

$$\frac{dx}{x\sqrt{\frac{a}{c}+xx}} = \frac{1}{2fc^{\frac{1}{2}}} L. \frac{\sqrt{\frac{a}{c}+xx}-\sqrt{\frac{a}{c}}}{\sqrt{\frac{a}{c}+xx}+\sqrt{\frac{a}{c}}} = \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

$L\left(\frac{\sqrt{a+cxx}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+cxx}+\sqrt{a}}\right)$ a cause de $f=\sqrt{\frac{a}{c}}$, de $\sqrt{\frac{a}{c}+xx}-\sqrt{\frac{a}{c}}=\frac{\sqrt{a+xx}-\sqrt{a}}{\sqrt{c}}$, & de $\sqrt{\frac{a}{c}+xx}+\sqrt{\frac{a}{c}}=\frac{\sqrt{a+cxx}+\sqrt{a}}{\sqrt{c}}$. *C. Q. F. D.*

LXIV.

THEOREME. $S.\ \frac{dx}{x\sqrt{a-cxx}}=\frac{1}{2\sqrt{a}}.\ L$

$$\frac{\sqrt{\frac{a}{c}}-\sqrt{\frac{a}{c}-xx}}{\sqrt{\frac{a}{c}}+\sqrt{\frac{a}{c}-xx}}=\frac{1}{2\sqrt{a}}\ L\left(\frac{\sqrt{a}-\sqrt{a+cxx}}{\sqrt{a}+\sqrt{a-cxx}}\right).$$

DEMONSTRATION. $S\ \frac{dx}{x\sqrt{a-cxx}}=\frac{1}{c^{\frac{1}{2}}}\ S\ \frac{dx}{x\sqrt{\frac{a}{c}-xx}}$. En supposant $\frac{a}{c}=ff$ on aura $\frac{dx}{x\sqrt{\frac{a}{c}-xx}}=\frac{dx}{x\sqrt{ff-xx}}$ qu'il faut intégrer. Soit $\sqrt{ff-xx}=f-z$, $ff-xx=ff-2fz+zz$, & $-xx=-2fz+zz$, $xx=2fz-zz$, $xdx=fdz-zdz$, $\frac{xdx}{xx}=\frac{dx}{x}=\frac{fdz-zdz}{2fz-zz}$, $\frac{dx}{x\sqrt{ff-xx}}=\frac{fdz-zdz}{(2fz-zz)\times(f-z)}$ $=$

$= \frac{dz}{2fz - zz} = \frac{\frac{1}{2f}dz}{2f - z} + \frac{\frac{1}{2f}dz}{z}$ comme on le voit par la reduction au même denominateur ; donc $S. \frac{dx}{x\sqrt{ff - xx}} = \frac{1}{2f} L z - \frac{1}{2} f L (2f - z) =$

$$\frac{1}{2f} L\left(\frac{f - \sqrt{ff - xx}}{f + \sqrt{ff - xx}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{a}{c}}} . L \frac{\sqrt{\frac{a}{c}} - \sqrt{\frac{a}{c} - xx}}{\sqrt{\frac{a}{c}} + \sqrt{\frac{a}{c} - xx}}$$

$$\& \frac{1}{c^{\frac{1}{2}}} S. \frac{dx}{x\sqrt{\frac{a}{c} - xx}} = \frac{1}{2\sqrt{a}} L \frac{\sqrt{\frac{a}{c}} - \sqrt{\frac{a}{c} - xx}}{\sqrt{\frac{a}{c}} + \sqrt{\frac{a}{c} - xx}}$$

C. Q. F. D.

LXV.

THEOREME. $S \frac{dx}{x} (a + cx^2)^{\frac{1}{2}} = (a + cx^2)^{\frac{1}{2}} - \sqrt{a} + \frac{1}{2}\sqrt{a}\ L. \left(\frac{(a + cx^2)^{\frac{1}{2}} - \sqrt{a}}{(a + cx^2)^{\frac{1}{2}} + \sqrt{a}}\right)$.

DEMONSTRATION. $\frac{dx}{x}(a + cx^2)^{\frac{1}{2}} = c^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x} (\frac{a}{c} + xx)^{\frac{1}{2}}$; donc $S. \frac{dx}{x} (a + cx^2)^{\frac{1}{2}} = c^{\frac{1}{2}} S. \frac{dx}{x} (\frac{a}{c} + x^2)^{\frac{1}{2}} = c^{\frac{1}{2}} S. \frac{xdx}{xx} (ff + x^2)^{\frac{1}{2}}$, en suppofant $\frac{a}{c} = ff$,

& $\sqrt{\frac{a}{c}} = f$. or si on fait $(ff + x^2)^{\frac{1}{2}} = f + z$ on aura $ff + x^2 = ff + 2fz + zz$, $xx = 2fz + zz$, $x\,dx = dz\,(f+z)$, $\frac{x\,dx}{xx} = \frac{dz\,(f+z)}{2fz+zz}$, $\frac{x\,dx}{xx}(ff+xx)^{\frac{1}{2}} = \frac{dz\,(f+z)}{2fz+zz} \times \overline{f+z} = \frac{dz\,(z+f)^2}{2fz+zz} = dz + \frac{ff\,dz}{zz+2fz} = dz + \frac{\frac{1}{2}f\,dz}{z} - \frac{\frac{1}{2}f\,dz}{z+2f}$, dont l'intégrale est $z + \frac{1}{2}fLz - \frac{1}{2}fL.(z+2f) = (ff+x^2)^{\frac{1}{2}} - f + \frac{1}{2}fL\left(\frac{z}{z+2f}\right) = \left(\frac{a}{c}+xx\right)^{\frac{1}{2}}$

$$- \sqrt{\frac{a}{c}} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{c}}\,L\,\frac{\left(\frac{a}{c}+xx\right)^{\frac{1}{2}} - \sqrt{\frac{a}{c}}}{\left(\frac{a}{c}+xx\right)^{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{a}{c}}}$$, donc

$$c^{\frac{1}{2}}\,S.\,\frac{dx}{x}\left(\frac{a}{c}+xx\right)^{\frac{1}{2}} = (a+cxx)^{\frac{1}{2}} - \sqrt{a} + \frac{1}{2}\sqrt{a}.L.\frac{(a+cxx)^{\frac{1}{2}} - \sqrt{a}}{(a+cxx)^{\frac{1}{2}} + \sqrt{a}}$$, *C. Q. F. D.*

LXVI.

PROBLEME. Trouver les intégrales de la différentielle $x^n\,dx\,(a-cxx)^m$, dans tous les cas de $n=0, n=1, n=-1$, & de $m=-1, m=\frac{1}{2}, m=-\frac{1}{2}$.

PREPARATION. $a-cxx=c(\frac{a}{c}-xx)$; $(a-cxx)^m=c^m(\frac{a}{c}-xx)^m$; & en faisant $\frac{a}{c}=ff$, ou $f=\sqrt{\frac{a}{c}}$, $(a-cxx)^m=c^m(ff-xx)^m$. Si on suppose $ff-xx=ff-2fz+zz$ on aura $(ff-xx)^{\frac{1}{2}}=f-z$, $z=f-(ff-xx)^{\frac{1}{2}}$, $2fz-zz=xx$, $xdx=(f-z)dz$, & $\frac{xdx}{xx}=\frac{dx}{x}=\frac{(f-z)dz}{2fz-zz}$.

1.e Cas, en supposant $n=0$, & $m=-1$, la différentielle sera $\frac{dx}{a-cxx}=\frac{\frac{1}{c}dx}{ff-xx}=\frac{\frac{1}{2fc}dx}{f+x}+\frac{\frac{1}{2cf}dx}{f-x}$, dont l'intégrale est $\frac{1}{2cf}L.(f+x)-\frac{1}{2cf}L(f-x)=\frac{1}{2cf}L.\left(\frac{f+x}{f-x}\right)=\frac{1}{2\sqrt{ac}}L.\left(\frac{\sqrt{a}+c^{\frac{1}{2}}x}{\sqrt{a}-c^{\frac{1}{2}}x}\right)$.

2.e Cas, $n=0$, $m=\frac{1}{2}$, ou $dx(a-cxx)^{\frac{1}{2}}=c^{\frac{1}{2}}dx\times$

$(ff-xx)^{\frac{1}{2}}$, dont l'intégrale est $\frac{c^{\frac{1}{2}}fs}{2} + \frac{c^{\frac{1}{2}}x}{2}(ff-xx)^{\frac{1}{2}}$ $= \frac{s\sqrt{a}}{2} + \frac{1}{2}x\,(a-cxx)^{\frac{1}{2}}$; $\sqrt{\frac{a}{c}}$ etant le rayon du cercle, & s un arc de ce cercle & x le sinus de s.

Car. Soit (fig.8.) ACB un quart de cercle, dont le rayon $CA=f=\sqrt{\frac{a}{c}}$, $BM=s$, $MQ=x=CP$, $MP=y=\sqrt{ff-xx}$, $ydx=dx\sqrt{ff-xx}$, $S.ydx= CBMP=S.dx\sqrt{ff-xx} = CBM+CMP = \frac{fs}{2}$ $+\frac{x}{2}\sqrt{ff-xx}$; par consequent $c^{\frac{1}{2}}dx(ff-xx)^{\frac{1}{2}} = \frac{c^{\frac{1}{2}}fs}{2}$ $+ \frac{c^{\frac{1}{2}}x}{2}\sqrt{ff-xx} = \frac{s\sqrt{a}}{2} + \frac{c^{\frac{1}{2}}}{2}x\sqrt{ff-xx} =$ $\frac{s\sqrt{a}}{2} + \frac{c^{\frac{1}{2}}}{2}x\sqrt{\frac{a}{c}-xx} = \frac{s\sqrt{a}}{2} + \frac{x}{2}\sqrt{a-cxx}$.

C. Q. F. D.

3e Cas, $n=o$, $m=-\frac{1}{2}$, ou $\frac{dx}{c^{\frac{1}{2}}(ff-xx)^{\frac{1}{2}}} = \frac{s}{\sqrt{a}}$ s etant un arc de cercle, dont le sinus est x & le rayon f ou $\sqrt{\frac{a}{c}}$. (Art. LVII.).

4e Cas, $n=1, m=-1$; ou $\frac{xdx}{a-cxx}$. Supposons $xx=z$, $xdx=\frac{1}{2}dz$, par consequent $\frac{xdx}{a-cxx} = \frac{\frac{1}{2}dz}{a-cz} = \frac{\frac{1}{2c}dz}{\frac{a}{c}-z}$, dont l'intégrale est $-\frac{1}{2c}L\left(\frac{a}{c}-z\right)$ $= -\frac{1}{2c}L\left(\frac{a}{c}-xx\right) = -\frac{1}{2c}L\left(\frac{a-cxx}{c}\right)$.

5e Cas. $n=1, m=\frac{1}{2}$, ou $xdx(a-cxx)^{\frac{1}{2}} = c^{\frac{1}{2}}xdx\left(\frac{a}{c}-xx\right)^{\frac{1}{2}} = c^{\frac{1}{2}}xdx(ff-xx)^{\frac{1}{2}}$ en supposant $ff-xx=zz$, on aura $xdx=-zdz$, & $c^{\frac{1}{2}}xdx(ff-xx)^{\frac{1}{2}}$ $=-c^{\frac{1}{2}}z^2dz$, dont l'intégrale est $-\frac{1}{3}c^{\frac{1}{2}}z^3 = -\frac{1}{3}$ $c^{\frac{1}{2}}\sqrt{\left(\frac{a}{c}-xx\right)^3}$.

6e Cas. $n=1, m=-\frac{1}{2}$, ou $\frac{xdx}{(a-cxx)^{\frac{1}{2}}} =$ $\frac{\frac{1}{c^{\frac{1}{2}}}xdx}{\left(\frac{a}{c}-xx\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\frac{1}{c^{\frac{1}{2}}}xdx}{(ff-xx)^{\frac{1}{2}}} = -\frac{1}{c^{\frac{1}{2}}}dz$, en faisant $\overline{ff-xx}^{\frac{1}{2}}=z$; donc $S.\frac{xdx}{(a-cxx)^{\frac{1}{2}}} = -\frac{1}{c^{\frac{1}{2}}}z = -$

$$\frac{(ff-xx)^{\frac{1}{2}}}{c^{\frac{2}{2}}} = -\frac{\left(\frac{a}{c}-xx\right)^{\frac{1}{2}}}{c^{\frac{1}{2}}} = -\frac{(a-cxx)^{\frac{1}{2}}}{c}.$$

7.° Cas. $n=-1, m=-1$, ou $\frac{dx}{x(a-cxx)} = \frac{\frac{1}{c^{\frac{2}{2}}}dx}{x\left(\frac{a}{c}-xx\right)}$

$$= \frac{\frac{1}{c^{\frac{2}{2}}}dx}{x(ff-xx)} = \frac{1}{ff\sqrt{c}}\frac{dx}{x} + \frac{\frac{1}{ff\sqrt{c}}x\,dx}{ff-xx}.$$ Donc S.

$$\frac{dx}{x(a-cxx)} = \frac{1}{ff\sqrt{c}}.Lx - \frac{1}{2ff\sqrt{c}}\,L\,\frac{(a-cxx)}{c} = \frac{\sqrt{c}}{a}$$

$$L.x - \frac{\sqrt{c}}{2a}\,L.\left(\frac{a-cxx}{c}\right).$$

8.° Cas. $n=-1$, $m=-\frac{1}{2}$, ou $\frac{dx}{x(a-cxx)^{\frac{1}{2}}} =$

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{c}}dx}{x(ff-xx)^{\frac{1}{2}}}, S.\frac{dx}{x(a-cxx)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{a}}.L\left(\frac{\sqrt{a}-\sqrt{a-cxx}}{\sqrt{a}+\sqrt{a-cxx}}\right)$$

(Art. LXIV.).

9.° Cas. $n=-1$, $m=\frac{1}{2}$, ou $\frac{dx}{x}\,(a-cxx)^{\frac{1}{2}}$

$$= \frac{c^{\frac{2}{2}}dx}{x}\left(\frac{a}{c}-xx\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{c^{\frac{1}{2}}dx}{x}\,(ff-xx)^{\frac{1}{2}}.$$ En ſuppoſant

$(ff - xx)^{\frac{1}{2}} = z$, on aura $ff - xx = zz$, $ff - zz = xx$, $-z\,dz = x\,dx$, $\frac{dx}{x} = \frac{x\,dx}{xx} = -\frac{z\,dz}{ff - zz}$; $\frac{c^{\frac{1}{2}}dx}{x}(ff - xx)^{\frac{1}{2}}$ $= -\frac{c^{\frac{1}{2}}z^2dz}{ff - zz} = c^{\frac{1}{2}}dz - \frac{ffc^{\frac{1}{2}}dz}{ff - zz}$, dont l'intégrale est $c^{\frac{1}{2}}z$ $- ffc^{\frac{1}{2}}S.\frac{dz}{ff - zz} = c^{\frac{1}{2}}z - \frac{ffc}{2\sqrt{a}}\ L.\ \frac{(\sqrt{a} + c^{\frac{1}{2}}z)}{(\sqrt{a} - c^{\frac{1}{2}}z)}$ (Cas 1.) $= \sqrt{a - cxx} - \frac{\sqrt{a}}{2}\ L\left(\frac{\sqrt{a} + \sqrt{a - cxx}}{\sqrt{a} - \sqrt{a - cxx}}\right)$.

LXVII.

PROBLEME. Trouver les intégrales de la différentielle $x^n dx\ (cx^2 - a)^m$ dans le Cas du Probleme precedent.

PREPARATION $(cxx - a) = c\,(xx - \frac{a}{c})$; c^m $(xx - \frac{a}{c})^m = (cxx - a)^m$, & en faisant $\frac{a}{c} = ff$, ou $f = \sqrt{\frac{a}{c}}$; $(cxx - a)^m = c^m(xx - ff)^m$. En faisant $xx - ff = xx - 2zx + zz$, on aura $(xx - ff)^{\frac{1}{2}} = x$ $- z$; $z = x - \sqrt{xx - ff}$; $-ff = -2zx + zz$; x

$= \frac{ff+zz}{2z}$, $x-z=\frac{ff-zz}{2z}$, $dx=-dz\frac{(ff-zz)}{2zz}$.

1°. Cas $n=0$, $m=-1$, ou $\frac{dx}{cxx-a}=\frac{\frac{1}{c}dx}{xx-ff}$

$=\frac{\frac{1}{2fc}dx}{x-f}-\frac{\frac{1}{2fc}dx}{x+f}$, dont l' intégrale est $\frac{1}{2fc}L(x-f)$

$-\frac{1}{2fc}L(x+f)=\frac{1}{2\sqrt{ac}}L\frac{(x-\sqrt{\frac{a}{c}})}{(x+\sqrt{\frac{a}{c}})}$.

2°. Cas $n=0$, $m=\frac{1}{2}$, ou $dx(cxx-a)^{\frac{1}{2}}=$

$c^{\frac{1}{2}}dx(xx-ff)^{\frac{1}{2}}$; en supposant $(xx-ff)^{\frac{1}{2}}=x-z$, ou $z=x-\sqrt{xx-ff}$, on aura $dx=\frac{-dz(ff-zz)}{2zz}$ &

$dx(xx-ff)^{\frac{1}{2}}=-\frac{dz(ff-zz)^2}{4z^3}=\frac{-f^4dz}{4z^3}+\frac{ffdz}{2z}-\frac{zdz}{4}$, dont l' intégrale est $\frac{f^4}{8z^2}+\frac{1}{2}ffLz-\frac{zz}{8}$.

Et l' intégrale cherchée $S.\ c^{\frac{1}{2}}dx(xx-ff)^{\frac{1}{2}}=$

$\frac{c^{\frac{1}{2}}f^4}{8(x-\sqrt{xx-ff})^2}+\frac{1}{2}c^{\frac{1}{2}}ffL(x-\sqrt{xx-ff})-\frac{c^{\frac{1}{2}}}{8}(x-\sqrt{xx-ff})^2$, dans la quelle $ff=\frac{a}{c}$.

3e Cas. $n = 0$, $m = -\frac{1}{2}$, ou $\frac{dx}{(cxx-a)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\frac{1}{c^{\frac{1}{2}}}dx}{(xx-ff)^{\frac{1}{2}}}$; en suppofant $(xx-ff)^{\frac{1}{2}} = x - z$, on aura $dx = -\frac{dz(ff-zz)}{2zz}$ & $\frac{dx}{(xx-ff)^{\frac{1}{2}}} = -\frac{\frac{1}{2}dz}{z}$, dont l'intégrale eft $-\frac{1}{2}Lz = -\frac{1}{2}L\left(x-(xx-ff)^{\frac{1}{2}}\right)$, & l'intégrale cherchée fera $-\frac{1}{2\sqrt{c}}L\left(x-\sqrt{xx-\frac{a}{c}}\right)$.

4e Cas. $n = 1$, $m = -1$, ou $\frac{xdx}{cxx-a} = \frac{\frac{1}{c^{\frac{1}{2}}}xdx}{xx-ff} = \frac{\frac{1}{2c^{\frac{1}{2}}}dz}{z-ff}$, en faifant $xx = z$; or $S\frac{\frac{1}{2c^{\frac{1}{2}}}dz}{z-ff} = \frac{1}{2c^{\frac{1}{2}}}L(z-ff) = \frac{1}{2c^{\frac{1}{2}}}L(xx-ff) = \frac{1}{2c^{\frac{1}{2}}}L\left(\frac{cxx-a}{c}\right)$.

5e Cas. $n = 1$, $m = \frac{1}{2}$, ou $xdx(cxx-a)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}dz(cz-a)^{\frac{1}{2}}$ en faifant $xx = z$. or $S\frac{1}{2}dz(cz-a)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3c}(cz-a)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3c}(cxx-a)^{\frac{3}{2}}$.

L

6.e Cas. $n = 1$, $m = -\frac{1}{2}$ ou $\frac{x\,dx}{(cxx-a)^{\frac{1}{2}}} =$

$\frac{\frac{1}{\sqrt{c}}\,x\,dx}{(xx-ff)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{c}} \cdot dz\,(z-ff)^{-\frac{1}{2}}$, dont l'intégrale est $\frac{1}{\sqrt{c}}\,(z-ff)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{c}}\,(xx-ff)^{\frac{1}{2}}$

$= \frac{1}{\sqrt{c}}\left(\frac{cxx-a}{c}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{(cxx-a)^{\frac{1}{2}}}{c}$.

7.e Cas. $n = -1$, $m = -1$, $\frac{dx}{x(cxx-a)} =$

$\frac{\frac{1}{c}\,dx}{x(xx-ff)} = \frac{\frac{1}{2c}\,dz}{z(z-ff)}$ en faisant $xx = z$; or $\frac{dz}{z(z-ff)}$

$= \frac{\frac{1}{ff}\,dz}{z-ff} - \frac{\frac{1}{ff}\,dz}{z}$, dont l'intégrale est $\frac{1}{ff}L(z-ff)$

$- \frac{1}{ff}\,Lz = \frac{1}{ff}\,L\frac{(z-ff)}{z}$ donc $S\,\frac{\frac{1}{c}\,dx}{x(cxx-a)} = \frac{1}{2c}$

$L\frac{(xx-ff)}{xx} = \frac{1}{2c}\cdot L\left(\frac{cxx-a}{cxx}\right)$.

8.e Cas. $n = -1$, $m = \frac{1}{2}$, ou $\frac{dx}{x}\,(cxx-a)^{\frac{1}{2}} =$

$c^{\frac{1}{2}}\,\frac{dx}{x}\cdot(xx-ff)^{\frac{1}{2}}$. En faisant $(xx-ff)^{\frac{1}{2}} = u$ on

aura $xx - ff = uu$, $xdx = udu$, $\frac{xdx}{xx} = \frac{dx}{x} = \frac{udu}{uu+ff}$,

$c^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x} (xx - ff)^{\frac{1}{2}} = \frac{c^{\frac{1}{2}} uudu}{uu+ff} = c^{\frac{1}{2}} du - \frac{c^{\frac{1}{2}} ffdu}{uu+ff}$, dont

l'intégrale eſt $c^{\frac{1}{2}} u - c^{\frac{1}{2}} ff \, S \frac{du}{uu+ff}$, or $c^{\frac{1}{2}} ff = \frac{c^{\frac{1}{2}} a}{c} =$

$\frac{a}{\sqrt{c}}$, & $S \frac{du}{uu+ff} = S \frac{du}{uu + \frac{a}{c}} = S \frac{cdu}{cuu+a}$. & l'intégrale de $\frac{du}{cuu+a}$, eſt $\frac{s}{a}$, s etant un arc de cercle, dont la tangente eſt u, & le rayon $\sqrt{\frac{a}{c}}$, ou f (Art. LII); donc $S \frac{du}{uu+ff} = c. \, S \frac{du}{cuu+a} = \frac{cs}{a}$, & $c^{\frac{1}{2}} ff$ $S. \frac{du}{uu+ff} = \frac{a}{\sqrt{c}} . \, S \frac{du}{uu+ff} = s\sqrt{c}$; par conſequent l'intégrale de la différentielle propoſée ſera, $c^{\frac{1}{2}} (xx - ff)^{\frac{1}{2}} - \frac{s}{\sqrt{c}} = (cxx - a)^{\frac{1}{2}} - s\sqrt{c}$, s etant un arc de cercle, dont le rayon eſt $\sqrt{\frac{a}{c}}$, & la tangente $\sqrt{xx - \frac{a}{c}}$.

9ᵉ. Cas. $n = -1$, $m = -\frac{1}{2}$, ou $\frac{dx}{x(cxx-a)^{\frac{1}{2}}}$

dont l'intégrale est $\frac{s\sqrt{c}}{a}$, s etant un arc de cercle, dont la secante est x, & le rayon $\sqrt{\frac{a}{c}}$ (LXI.).

LXVIII.

PROBLEME. Trouver les intégrales des différentielles $x^n dx\ (bx+cxx)^m$, $x^n dx\ (bx-cxx)^m$, & $x^n dx\ (cxx-bx)^m$, dans les cas des problemes precedens par rapport aux exposans n &, m.

POUR LA 1re DIFFÉRENTIELLE $x^n dx\ (bx+cxx)^m$.

PREPARATION. $bx+cxx=c\left(\frac{bx}{c}+xx\right)$, $(bx+cxx)^m=c^m\left(\frac{bx}{c}+xx\right)^m=c^m(2bx+xx)^m$ en supposant $\frac{b}{c}=2b$. Et si on fait $xx+2bx+bb=zz$, ou $x+b=z$, on aura $xx+2bx=zz-bb$, $c^m(2bx+xx)^m=c^m(zz-bb)^m$, $x^n dx(bx+cxx)^m=c^m dz(z-b)^n\times(zz-bb)^m$. En supposant $(xx+2bx)^{\frac{1}{2}}=x+u$, on a $xx+2bx=xx+2xu+uu$, & $2bx-2ux=uu$, $x=\frac{uu}{2b-2u}$, d'ou l'on tire $x+u=\frac{2bu-uu}{2b-2u}$, $dx=\frac{2budu}{2(b-u)^2}-\frac{uudu}{2(b-u)^2}$; $\frac{dx}{x}=\frac{2bdu-udu}{u(b-u)}$. on peut aussi aulieu de $bx+cx$ ecrire

$x(b+cx)$ & $x^m(b+cx)^m=(bx+cx^2)^m$, & x^{n+m} $dx(b+cx)^m = x^n\,dx(bx+cx^2)^m$, on reduit par lá la différentielle propoſée au ſecond cas, ou au premier; dans lesquels Nous avons trouvé les intégrales fondamentales.

1er Cas. $n=0, m=-1$, ou $\frac{dx}{bx+cx^2} = \frac{\frac{1}{c}dz}{zz-bb}$ dont l' intégrale eſt $\frac{1}{2bc}L\left(\frac{z-b}{z+b}\right) = \frac{1}{b}L\left(\frac{x}{x+\frac{b}{c}}\right)$ $= \frac{1}{b}L\left(\frac{cx}{cx+b}\right)$ par le 1erCas du probleme precedent.

2e Cas. $n=0, m=\frac{1}{2}$, ou $dx\,(bx+cxx)^{\frac{1}{2}} =$ $c^{\frac{1}{2}}dz(zz-bb)^{\frac{1}{2}}$, dont on trouve l' intégrale par le 2e Cas. de l' Art. LXVII. $= \frac{c^{\frac{1}{2}}b^4}{8(z-\sqrt{zz-bb})^2} + \frac{1}{2}c^{\frac{1}{2}}bb$ $(z-\sqrt{zz-bb}) - \frac{1}{8}c^{\frac{1}{2}}(z-\sqrt{zz-bb})^2$, dans la quelle $b=\frac{b}{2c}$, & $z=x+b$.

3e Cas. $n=0, m=-\frac{1}{2}$ ou $\frac{dx}{(bx+cxx)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{\frac{1}{c}}\,dz}{(zz-bb)^{\frac{1}{2}}}$;

dont l'intégrale eſt $-\frac{1}{2\sqrt{c}} L(z-\sqrt{zz-bb})$ par le 3e. Cas de l'Art. LXVII.

4e. Cas. $n=1, m=-1$, ou $\frac{xdx}{bx+cxx} = \frac{\frac{1}{c}dx}{\frac{b}{c}+x}$,

dont l'intégrale eſt $\frac{1}{c} L \frac{b}{c}+x = \frac{1}{c} L\left(\frac{b+cx}{c}\right)$.

5e. Cas. $n=1, m=\frac{1}{2}$, ou $xdx(bx+cxx)^{\frac{1}{2}} = c^{\frac{1}{2}}dz\ (z-b).\ (zz-bb)^{\frac{1}{2}} = c^{\frac{1}{2}}zdz(zz-bb)^{\frac{1}{2}} - c^{\frac{1}{2}}bdz(zz-bb)^{\frac{1}{2}}$. or $S.\ c^{\frac{1}{2}}zdz(zz-bb)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3} c^{\frac{1}{2}}(zz-bb)^{\frac{3}{2}}$ par le 5e. Cas de l'Art. LXVII., & $S. - c^{\frac{1}{2}}bdz(zz-bb)^{\frac{1}{2}} = -\frac{c^{\frac{1}{2}}b^5}{8(z-\sqrt{zz-bb})^2} - \frac{1}{2}c^{\frac{1}{2}} b^3.\ L.(z-\sqrt{zz-bb}) + \frac{1}{8}c^{\frac{1}{2}}b(z-\sqrt{zz-bb})^2$ (par le 2e. Cas du même art.); donc en aujoutant ces deux intégrales, & en ſubſtituant au lieu de z & de b leurs valeurs, on aura l'intégrale $S.\ xdx\ (bx+cxx)^{\frac{1}{2}}$.

6e Cas. $n = 1$, $m = -\frac{1}{2}$, ou $\frac{x\,dx}{(cxx+bx)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{c}}$

$$\frac{dz(z-b)}{(zz-bb)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{c}}\,\frac{z\,dz}{(zz-bb)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{\sqrt{c}}\,\frac{b\,dz}{(zz-bb)^{\frac{1}{2}}}, \text{ or}$$

$$S.\frac{1}{\sqrt{c}}\,\frac{z\,dz}{(zz-bb)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{c}}(zz-bb)^{\frac{1}{2}}, \;\&\; S - \frac{1}{\sqrt{c}}$$

$$\frac{(b\,dz)}{(zz-bb)^{\frac{1}{2}}} = \frac{b}{2c^{\frac{1}{2}}}\cdot L\,(z-\sqrt{zz-bb})$$ par le 6^e

& le 3^e Cas de l'art LXVII., donc $S.\frac{x\,dx}{(cxx+bx)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{c}}$

$$(zz-bb)^{\frac{1}{2}} + \frac{b}{2c^{\frac{1}{2}}}\cdot L\,(z-\sqrt{zz-bb}).$$

7^e Cas. $n = -1$, $m = -1$, ou $\frac{dx}{x(bx+cxx)} =$

$\frac{\frac{1}{c}\,dx}{xx(2b+x)} = \frac{\frac{1}{2bc}\,dx - \frac{1}{4bbc}\,x\,dx}{xx} + \frac{\frac{1}{4bbc}\,dx}{x+2b}$, comme on le voit en reduisant ces fractions en même denomination. or ces fractions sont $= \frac{1}{2bc}\cdot\frac{dx}{xx} - \frac{1}{4bbc}\cdot\frac{dx}{x} + \frac{1}{4bbc}\cdot\frac{dx}{x+2b}$, dont l'intégrale est $-\frac{1}{2bcx} - \frac{1}{4bbc}\cdot Lx +$

$\frac{1}{4bbc} \cdot L(x+2b) = \frac{1}{4bbc} \cdot L\left(\frac{x+2b}{x}\right) - \frac{1}{2bcx}$.

8e. Cas. $n = -1$, $m = \frac{1}{2}$, ou $\frac{dx}{x}(bx+cxx)^{\frac{1}{2}} = c^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x}(2bx+xx)^{\frac{1}{2}}$. En ſuppoſant $(xx+2bx)^{\frac{1}{2}} = x + u$, ou $(xx+2bx)^{\frac{1}{2}} - x = u$, on trouve $x = \frac{uu}{2b-2u}$, $dx = \frac{2budu - uudu}{2(b-u)^2}$, $\frac{dx}{x} = \frac{2bdu - udu}{u(b-u)}$, $\frac{dx}{x}(xx+2bx)^{\frac{1}{2}} = \frac{dx}{x}(x+u) = dx + \frac{udx}{x} = dx + \frac{2bdu - udu}{b-u} = dx + du + \frac{bdu}{b-u}$, dont l'intégrale eſt $x + u - bL.(b-u) = (xx+2bx)^{\frac{1}{2}} - bL(b + x - \sqrt{xx+2bx})$, qui etant multipliée par $c^{\frac{1}{2}}$ ſera l'intégrale cherchée.

9e. Cas. $n = -1$, $m = -\frac{1}{2}$, ou $\frac{dx}{x(bx+cxx)^{\frac{1}{2}}} = \frac{dx}{c^{\frac{1}{2}}x(2bx+xx)^{\frac{1}{2}}}$. En ſuppoſant comme dans le cas precedent $x + u = (2bx+xx)^{\frac{1}{2}}$, on aura $\frac{dx}{x} = \frac{2bdu - udu}{u(b-u)}$, & $\frac{dx}{x(2bx+xx)^{\frac{1}{2}}} = \frac{dx}{x(x+u)} = \frac{2du}{uu}$, dont l'intégrale eſt

—

$-\frac{2}{u} = \frac{-2}{(2bx+xx)^{\frac{1}{2}} - x}$, qu'il faut diviser par $c^{\frac{1}{2}}$ pour avoir l' intégrale cherchée.

LA DIFFÉRENTIELLE $x^n dx(cxx - bx)^m$,

Ou $c^m x^n dx(xx - 2bx)^m$,

Peut s' intégrer dans tous les cas a peu prés comme la precedente, & en suppofant $(xx - 2bx)^{\frac{1}{2}} = x - u$, ou $x - b = z$ & $xx - 2bx = zz - bb$. Dans la premiere fuppofition on aura $x = \frac{uu}{2u - 2b}$; $x - u = \frac{2bu - uu}{2u - 2b}$; $dx = -du\,\frac{(2bu - uu)}{2(u-b)^2}$; $dx(xx - 2bx)^{\frac{1}{2}} = -\frac{du(2bu - uu)^2}{4(u-b)^3}$; & $\frac{dx}{(xx - 2bx)^{\frac{1}{2}}} = \frac{-du}{u - b}$. dans l' autre fuppofition on a $x^n\,dx(xx - 2bx)^m = dz\,(z+b)^n \cdot (zz - bb)^m$.

1.er Cas. $n = o, m = -1$, ou $x^n dx(xx - 2bx)^m = \frac{dx}{xx - 2bx} = \frac{dx}{2b(x-2b)} - \frac{dx}{2bx}$, dont l' intégrale eft $\frac{1}{2b} \cdot L\left(\frac{x - 2b}{x}\right)$.

2.e Cas. $n = o$, $m = \frac{1}{2}$, ou $x^o dx(xx - 2bx)^{\frac{1}{2}} = dz(zz - bb)^{\frac{1}{2}}$ dont on a deja trouvé l' intégrale.

On a aussi $dx(xx-2bx)^{\frac{1}{2}} = -\frac{du(2bu-uu)^2}{4(u-b)^3}$, qu'on intégre facilement en supposant $u-b=y$, d'ou l'on tire la différentielle $-\frac{dy(bb-yy)^2}{4y^3}$.

3e. Cas. $n=0$, $m=-\frac{1}{2}$, ou $\frac{dx}{(xx-2bx)^{\frac{1}{2}}} =$

$\frac{-du}{u-b}$, dont l'intégrale est $-L(u-b)$.

4e. Cas. $n=1, m=-1$, ou $\frac{xdx}{xx-2bx} = \frac{dx}{x-2b}$

dont l'intégrale est $L(x-2b)$.

5e. Cas, $n=1$, $m=\frac{1}{2}$, ou $xdx(xx-2bx)^{\frac{1}{2}}$

$= dz(z+b).(zz-bb)^{\frac{1}{2}}$ ou $= \frac{-uudu(2bu-uu)^2}{8(u-b)^4}$.

On trouve l'intégrale de $dz(z+b).(zz-bb)^{\frac{1}{2}}$ comme dans le 5e. cas ci dessus, & l'autre intégrale en faisant $u-b=y$.

6e. Cas. $n=1$, $m=-\frac{1}{2}$, ou $\frac{xdx}{(xx-2bx)^{\frac{1}{2}}} =$

$\frac{-uudu}{2(u-b)^2}$, qu'on intégre en faisant $u-b=y$.

7e. Cas. $n=-1, m=-1$, ou $\frac{dx}{x(xx-2bx)} =$

$\frac{dx}{4bb(x-2b)} - \frac{dx}{4bbx} - \frac{dx}{2bxx}$, dont l'intégrale eſt $\frac{1}{4bb} L$ $(x-2b) - \frac{1}{4b^2} Lx + \frac{1}{2bx} = \frac{1}{4bb} L . \left(\frac{x-2b}{x}\right) + \frac{1}{2bx}$.

8.e Cas. $n = -1, m = \frac{1}{2}$, ou $\frac{dx}{x}(xx - 2bx)^{\frac{1}{2}}$ $= -\frac{du(2b-u)^2}{2(u-b)^2}$, qu'on intégre en ſuppoſant $u - b = y$.

9.e Cas. $n = -1, m = -\frac{1}{2}$, ou $\frac{dx}{x(xx-2bx)^{\frac{1}{2}}} =$ $-\frac{2du}{uu}$, dont l'intégrale eſt $\frac{2}{u}$.

POUR LA DIFFE'RENTIELLE $x^n\, dx\,(bx - cxx)^m$,

Ou $c^m x^n\, dx(2bx - xx)^m$.

Si on ſuppoſe $x - b = z$, ou $xx - 2bx + bb$ $= zz$, on aura $dx = dz$, & $x^n dx(2bx - xx)^m =$ $dz(z+b)^n \cdot (bb - zz)^m$.

1.r Cas. $n = o, m = -1$, ou $\frac{dx}{2bx - xx} = \frac{dx}{2bx} +$ $\frac{dx}{2b(2b-x)}$, dont l'intégrale eſt $\frac{1}{2b} L\left(\frac{x}{2b-x}\right)$.

2.e Cas. $n = o, m = \frac{1}{2}$ ou $dx(2bx - xx)^{\frac{1}{2}} = dz$ $(bb - zz)^{\frac{1}{2}}$ deja integrée.

3e. Cas. $n = o, m = -\frac{1}{2}$ ou $\frac{dx}{(2bx-xx)^{\frac{1}{2}}} = \frac{dz}{(bb-zz)^{\frac{1}{2}}}$ integrée.

4e. Cas. $n = 1, m = -1$, ou $\frac{xdx}{2bx-xx} = \frac{dx}{2b-x}$ dont l'intégrale est $-L(2b-x)$.

5e. Cas. $n = 1, m = \frac{1}{2}$, ou $xdx(2bx-xx)^{\frac{1}{2}} = dz(z+b).(bb-zz)^{\frac{1}{2}} = zdz(bb-zz)^{\frac{1}{2}} + bdz(bb-zz)^{\frac{1}{2}}$, qu'on a deja integrée.

6e. Cas. $n = 1, m = -\frac{1}{2}$, ou $\frac{xdx}{(2bx-xx)^{\frac{1}{2}}} = \frac{zdz}{(bb-zz)^{\frac{1}{2}}} + \frac{bdz}{(bb-zz)^{\frac{1}{2}}}$ aussi integrée.

7e. Cas. $n = -1, m = -1$, ou $\frac{dx}{x(2bx-xx)} = \frac{dx}{4bbx} + \frac{dx}{2bxx} + \frac{dx}{4bb(2b-x)}$, dont l'intégrale est $\frac{1}{4bb}.L\left(\frac{x}{2b-x}\right) - \frac{1}{2bx}$.

8e. Cas. $n = -1, m = \frac{1}{2}$, ou $\frac{dx(2bx-xx)^{\frac{1}{2}}}{x} =$

$\frac{dx(2bx-xx)}{x(2bx-xx)^{\frac{1}{2}}} = \frac{2bdx}{(2bx-xx)^{\frac{1}{2}}} - \frac{xdx}{(2bx-xx)^{\frac{1}{2}}}$ integrée ci deſſus.

9°. Cas. $n=-1$, $m=-\frac{1}{2}$ ou $\frac{dx}{x(2bx-xx)^{\frac{1}{2}}}$, dont l'intégrale eſt $-\frac{(2bx-xx)^{\frac{1}{2}}}{bx}$ comme on peut le voir en prenant la différentielle.

LXIX.

PROBLEME. Trouver les intégrales des différentielles $x^n dx(a+bx+cxx)^m$, & $x^n dx(a+bx-cxx)^m$ dans les cas des problemes precedens par rapport aux expoſans m. & n.

1°. La différentielle $x^n dx(a+bx+cxx)^m = c^m x^n dx\left(\frac{a}{c}+2bx+xx\right)^m$, en mettant $2b$ aulieu de $\frac{b}{c}$; & en ſuppoſant $x+b=z$ elle devient $c^m dz(z-b)^n \left(zz-bb+\frac{a}{c}\right)^m$ qu'on intégre par les problemes precedens lorſque n eſt zero, ou 1, & que m eſt -1 ou $\pm\frac{1}{2}$; puiſque n etant $=0$, la différentielle eſt $c^m dz$

$\left(zz - bb + \frac{a}{c}\right)^m$, & que n etant $= 1$, elle eſt $c^m dz$ $(z-b).\left(zz - bb + \frac{a}{c}\right)^m$.

Mais lorſque $n = -1$, cette différentielle devient $\frac{c^m dz\left(zz - bb + \frac{a}{c}\right)^m}{z-b}$; dont on trouve facilement l' intégrale dans la ſuppoſition de $m = -1$, puiſqu'alors ſi l'on fait $f = -bb + \frac{a}{c}$ on a $\frac{dz}{(z-b).(zz+f)} = \frac{dz}{(f+bb).(z-b)} - \frac{zdz}{(f+bb).(zz+f)} - \frac{bdz}{(f+bb).(zz+f)}$, dont on intégre tous les termes par les problemes precedens.

Quand n etant $= -1$, $m = \pm\frac{1}{2}$, on ſuppoſera $(zz+f)^{\frac{1}{2}} = z + u$, ce qui donnera $z = \frac{f-uu}{2u}$, $z+u = \frac{f+uu}{2u} = (zz+f)^{\frac{1}{2}}$, $z - b = \frac{f-2bu-uu}{2u}$, $dz = -\frac{du(f+uu)}{2uu}$, $\frac{dz}{z-b} = -\frac{du(f+uu)}{u(f-2bu-uu)}$; $\frac{dz(zz+f)^{\frac{1}{2}}}{z-b} = -\frac{du(f+uu)^2}{2uu(f-2bu-uu)}$, & $\frac{dz}{(z-b).(zz+f)^{\frac{1}{2}}} = -\frac{2du}{f-2bu-uu}$.

Cette derniere différentielle s'intégre par les problemes precedens (Art. XLVIII.) l'autre différentielle —

$$\frac{du(f+uu)^2}{2uu(f-2bu-uu)} = \frac{du(uu+f)^2}{2uu(uu+2bu-f)} = \frac{du(u^4+2fuu+ff)}{2uu(uu+2bu-f)}$$

$$= \frac{uudu}{2(uu+2bu-f)} + \frac{fdu}{uu+2bu-f} + \frac{ffdu}{2uu(uu+2bu-f)}$$

S' intégre aussi par parties: Car $\frac{uudu}{2(uu+2bu-f)} = \frac{1}{2}du - \frac{budu}{uu+2bu-f} + \frac{\frac{1}{2}fdu}{uu+2bu-f}$ différentielle dont chaque terme s'intégre separament par les problemes precedens, aussibien que $\frac{fdu}{uu+2bu-f}$; il ne reste que $\frac{ffdu}{2uu(uu+2bu-f)}$ $= -\frac{2budu-fdu}{2uu} + \frac{2budu+4bb+f}{2(uu+2bu-f)}$, qu'on intégre de la même maniere.

2° La différentielle $x^n dx(a+bx-cxx)^m = c^m x^n dx.$ $\left(\frac{a}{c}+2bx-xx\right)^m$, en mettant $2b$ au lieu de $\frac{b}{c}$; & en supposant $x-b=z$, devient $c^m dz(z+b)^n.$ $\left(\frac{a}{c}+bb-zz\right)^m$ dont on trouve l' intégrale comme ci dessus lorsque n est zero ou 1, & $m=-1$, ou $m=\pm\frac{1}{2}$. Mais lorsque $n=-1$, la différentielle devient $\frac{c^m dz\left(\frac{a}{c}+bb-zz\right)^m}{z+b}$ qu'on intégre aussi comme au num. 1° quand $m=-1$; & lorsque $m=\pm\frac{1}{2}$, on

reduit $\sqrt{\frac{a}{c}+bb-zz}$ en quantité rationelle, en supposant que $\frac{a}{c}+bb$ est une quantité positive $=rr$ parce qu'autrement $\sqrt{\frac{a}{c}+bb-zz}$ seroit imaginaire, & en faisant $\sqrt{rr-zz}=r-zu$ d'ou l'on tire $z=\frac{2ru}{uu+1}$, $dz=\frac{2rdu(1-uu)}{(1+uu)^2}$, $\sqrt{rr-zz}=r-zu=\frac{r(1-uu)}{1+uu}$, $z+b=\frac{buu+2ru+b}{(1+uu)}$, & $\frac{dz}{(z+b).(rr-zz)^{\frac{1}{2}}}=\frac{2du}{buu+2ru+b}$ qu'on intégre par les problemes precedens (Art. XLVIII.).

La différentielle $\frac{dz\sqrt{rr-zz}}{z+b}$ en multipliant son numerateur & son denominateur par $\sqrt{rr-zz}$ se change en celle ci $\frac{rrdz-zzdz}{(z+b).(rr-zz)^{\frac{1}{2}}}=\frac{rrdz}{(z+b).(rr-zz)^{\frac{1}{2}}}-\frac{zzdz}{(z+b).(rr-zz)^{\frac{1}{2}}}$ or l'intégrale du terme $\frac{rrdz}{(z+b).(rr-zz)^{\frac{1}{2}}}$ vient d'etre trouvée, & celle du terme $-\frac{zzdz}{(z+b).(rr-zz)^{\frac{1}{2}}}$ se trouve par les problemes precedens en supposant $z+b=y$,

$= y$, ce qui donne $\frac{zzdz}{(z+b).(rr-zz)^{\frac{1}{2}}} = \frac{dy(y-b)^2}{y\sqrt{rr-(y-b)^2}}$
$= \frac{ydy}{\sqrt{rr-(y-b)^2}} - \frac{2bdy}{\sqrt{rr-(y-b)^2}} + \frac{bbdy}{y\sqrt{rr-(y-b)^2}}$.

LXX.

THEOREME. La différentielle $z^q dz(a+bz^p+cz^{2p})^m$, que nous avons propoſée au commencement de ce chapitre, peut toujours S' intégrer abſolument ou par les tables des logarithmes & des ſinus, lorſque l' expoſant m etant -1, ou $\pm\frac{1}{2}$, l' expoſant q eſt -1, ou $p-1$, ou $2p-1$; quelles que ſoient les conſtantes a, b, c, pourvu que dans le cas de $m = \pm\frac{1}{2}$, la quantité $a+bz^p+cz^{2p}$ ne ſoit point negative.

DEMONSTRATION. La différentielle $z^q dz(a+bz^p+cz^{2p})^m$ ſe reduit (Art. XLII.) a celleci $\frac{1}{p}x^{\frac{q+1}{p}-1}dx$ $(a+bx+cx^2)^m = \frac{1}{p}x^n dx(a+bx+cx^2)^m$ en ſuppoſant $z^p = x$, & $\frac{q+1}{p} - 1 = n$. or nous avons demontré en detail dans tout ce chapitre que la différentielle $x^n dx$ $(a+bx+cx^2)^m$ peut toujours s' intégrer abſolument

N

ou par les tables des logarithmes & des finus, lorfque l'expofant m etant -1 ou $\pm\frac{1}{2}$, l'autre expofant n, ou $\frac{q+1}{p}-1$, eft $=0$, ou ± 1; & en faifant $\frac{q+1}{p}-1=0$, & en fuite $=\pm 1$, on trouve $q=p-1$, $q=2p-1$, $q=-1$. donc &c. C. *Q.* F. D.

REMARQUE. Les différentielles $z^q dz(a+bz^p)^m$, $z^q dz(a+cz^{2p})^m$, & $z^q dz(bz^p+cz^{2p})^m$ fe reduifent aux différentielles refpectives $x^n dx(a+bx)^m$, $x^n dx(a+cxx)^m$, & $x^n dx(bx+cxx)^m$ en fuppofant $z^p=x$, & $\frac{q+1}{p}-1=n$.

Or Nous avons demontré (Art. XLV.) que la différentielle $x^n dx(a+bx)^m$ peut toujours s'intégrer abfolument ou par les logarithmes, lorfque l'un des deux expofans m ou n eft un nombre entier pofitif ou zero, donc la différentielle $z^q dz(a+bz^p)^m$ pourra s'intégrer de la même maniere, lorfque $\frac{q+1}{p}-1$ fera un nombre entier pofitif ou zero, ou lorfque $q=p-1$, ou que $\frac{q+1}{p}$ fera un nombre entier pofitif.

Nous avons auffi demontré (Art. XLVI.) que la différentielle $x^n dx(a+cx^2)^m$ eft intégrable abfolument

ou par les logarithmes, lorſque $\frac{n-1}{2}$ eſt un nombre entier poſitif ou zero: donc la différentielle $z^q dz(a+cz^{2p})^m$ ſera intégrable de la même maniere, lorſque $\frac{q+1-2p}{2p}$ ſera un nombre entier poſitif ou zero, c' eſt a dire quand on aura $q=2p-1$, ou $\frac{q+1}{2p}$ egal a un nombre entier poſitif.

En fin (par l' Art. XLVII.) la différentielle $x^n dx(bx+cxx)^m$ peut s' intégrer abſolument ou par logarithmes, quand $m+n$, ou $m+\frac{q+1}{p}-1$, eſt un nombre entier poſitif ou zero: donc dans ce Cas la différentielle $z^q dz(bz^p+cz^{2p})^m$ pourra auſſi etre intégrée de la même maniere.

Ce chapitre & le ſuivant dans le quel nous traitterons du calcul différentiel & intégral trigonometrique, ſont une preparation a la reſolution des equations différentielles rationelles.



CHAPITRE III.

De l'intégration des Différentielles Trigonometriques, ou exprimées par les Sinus, Cofinus, Tangentes, Secantes, Cotangentes, Cofecantes, Sinus verfes, & par leurs Logaritbmes.

LXXI.

Nous fuppoferons dans tout ce Chapitre que u reprefente un arc de cercle, ou un angle mefuré par cet arc; & que π eft la demie circonference du même cercle, dont le raïon foit l' unitè. Nous defignerons les Sinus, Cofinus, Tangentes, Cotangentes, Cofecantes, Sinus verfes, par les premieres lettres de ces noms, ou par Sin.,Cos., Tang., Cot., Cos.,Sin.ver.; & lorfque ces expreffions feront feules, elles fignifieront toujours les Sinus, les Cofinus, les Tangentes &c. du même arc ou du même angle, pris dans le cercle dont le rayon eft l' unitè; mais lorfqu'elles feront fuivies d' une autre lettre, comme Sin. u, Cos. u, Tang. u &c., ou Sin. z, Cot. y. &c. chacune de ces lettres u, z, y &c. fignifiera un arc de cercle u, ou z, ou y, pris dans le cercle dont le rayon eft l' unité, & Sin. u le Sinus d' un angle, ou de l' arc u, Tang. z la Tangente de l' angle ou de l' arc z. Nous allons expo-

ſér dans les lemmes ſuivans les principales formules de trigonometrie dont nous pourrons avoir beſoin dans la ſuite, & qu' on trouve demontrées dans les Auteurs modernes qui ont traitè de cette partie de la Geometrie; il ſeroit inutile d' en donner ici les demonſtrations, & trop penible a nos Lecteurs d' etre ſouvent obligès de recourir a leurs ouvrages.

LXXII.

LEMME I. $\text{Sin.}\, o = o$, $\text{Cos.}\, o = 1$, $\text{Sin.}\, du = du$, $\text{Cos.}\, du = 1$. $\text{Sin.}\, \frac{1}{2}\pi = 1$. $\text{Cos.}\, \frac{1}{2}\pi = o$, $\text{Sin.}\, \pi = o$, $\text{Cos.}\, \pi = -1$, $\text{Sin.}\, \frac{3}{2}\pi = -1$, $\text{Cos.}\, \frac{3}{2}\pi = o$, $\text{Sin.}\, 2\pi = o$, $\text{Cos.}\, 2\pi = 1$. On voit par ces formules que tous les Sinus, & tous les Coſinus ſont renfermés entre les limites $+1$ & -1. On a encore $\text{Cos.}\, u = \text{Sin.} \left(\frac{1}{2}\pi - u\right)$, $\text{Sin.}\, u = \text{Cos.} \left(\frac{1}{2}\pi - u\right)$; & $\text{Sin.}^2 + \text{Cos.}^2 = 1$.

LXXIII.

LEMME 2. u & z etant des arcs du cercle, dont le rayon eſt 1, on a les formules q'ui ſuivent.

$$\text{Sin.}(u + z) = \text{Sin.}\, u.\, \text{Cos.}\, z + \text{Cos.}\, u\, \text{Sin.}\, z$$
$$\text{Cos.}(u + z) = \text{Cos.}\, u.\, \text{Cos.}\, z - \text{Sin.}\, u.\, \text{Sin.}\, z$$

$$\text{Sin.}(u - z) = \text{Sin.}\,u.\ \text{Cos.}\,z - \text{Cos.}\,u.\,\text{Sin.}\,z.$$
$$\text{Cos.}(u - z) = \text{Cos.}\,u.\ \text{Cos.}\,z + \text{Sin.}\,u.\,\text{Sin.}\,z.$$

On tire de ces formules les quatre autres ſuivantes.

$$\text{Sin.}\,u.\ \text{Cos.}\,z = \frac{\text{Sin.}(u + z) + \text{Sin.}(u - z)}{2}$$

$$\text{Cos.}\,u.\,\text{Sin.}\,z = \frac{\text{Sin.}(u + z) - \text{Sin.}(u - z)}{2}$$

$$\text{Cos.}\,u.\ \text{Cos.}\,z = \frac{\text{Cos.}(u - z) + \text{Cos.}(u + z)}{2}$$

$$\text{Sin.}\,u.\ \text{Sin.}\,z = \frac{\text{Cos.}(u - z) - \text{Cos.}(u + z)}{2}$$

On en duit enſuite celles ci

$$\text{Sin.}\,u + \text{Sin.}\,z = 2\,\text{Sin.}(\tfrac{1}{2}u + \tfrac{1}{2}z) \times \text{Cos.}(\tfrac{1}{2}u - \tfrac{1}{2}z)$$

$$\text{Sin.}\,u. - \text{Sin.}\,z. = 2\,\text{Cos.}(\tfrac{1}{2}u + \tfrac{1}{2}z) \times \text{Sin.}(\tfrac{1}{2}u - \tfrac{1}{2}z)$$

$$\text{Cos.}\,u + \text{Cos.}\,z = 2\,\text{Cos.}(\tfrac{1}{2}u + \tfrac{1}{2}z) \times \text{Cos.}(\tfrac{1}{2}u - \tfrac{1}{2}z)$$

$$\text{Cos.}\,z - \text{Cos.}\,u = 2\,\text{Sin.}(\tfrac{1}{2}u + \tfrac{1}{2}z) \times \text{Sin.}(\tfrac{1}{2}u - \tfrac{1}{2}z)$$

LXXIV.

LEMME 3. Parceque $aa + bb = (a + b\sqrt{-1}) \times (a - b\sqrt{-1})$, & que (par le lemme 1.) $\text{Cos.}^2 + \text{Sin.}^2 = 1$, en prennant le ſinus & le coſinus d' un même angle quelconque, on aura auſſi (Cos. $+$ Sin.$\sqrt{-1}$) $\times$ (Cos.

$-$ Sin. $\sqrt{-1}) = 1$; & (Cos. u + Sin. $u \sqrt{-1}$) $\times$ (Cos. u — Sin. $u \sqrt{-1}$) = (Cos. z + Sin. z $\sqrt{-1}$) $\times$ (Cos. z — Sin. z $\sqrt{-1}$) ;

Si on multiplie Cos. z + Sin. z $\sqrt{-1}$ par Cos. u + Sin. u $\sqrt{-1}$, le produit ſera Cos. u. cos. z — Sin. u. Sin. z + (Cos. u. Sin. z + Sin. u. Cos. z) $\sqrt{-1}$; mais on a (par le lemme precedent) Cos. u. Cos. z — Sin. u. Sin. z = Cos. ($u + z$), & Cos. u. Sin. z. + Sin. u. Cos. z = Sin. ($u + z$). Donc le produit (Cos. u + Sin. u $\sqrt{-1}$). $\times$ (Cos. z + Sin. z $\sqrt{-1}$) = Cos. ($u + z$) + $\sqrt{-1}$ $\times$ (Sin. $u + z$).

De même le produit (Cos. u — Sin. u. $\sqrt{-1}$) $\times$ (Cos. z — Sin. z. $\sqrt{-1}$) = Cos. ($u + z$) — $\sqrt{-1}$ $\times$ Sin. ($u + z$).

On trouve par un Calcul ſemblable le produit (Cos. $\pm$ Sin. u $\sqrt{-1}$) $\times$ (Cos. z $\pm$ Sin. z. $\sqrt{-1}$) $\times$ (Cos. x $\pm$ Sin. x $\sqrt{-1}$) = Cos. ($u + z + x$) $\pm$ $\sqrt{-1}$ $\times$ Sin. ($u + z + x$).

LXXV.

COROLLAIRE. 1. Donc ſi l' on ſuppoſe $z = u$,

on aura le quarré, $(\text{Cos. } u \pm \text{Sin. } u \sqrt{-1})^2 = \text{Cos. } 2u \pm \text{Sin. } 2u. \sqrt{-1}$; & en ſuppoſant encore $x = u$, on aura le Cube $(\text{Cos. } u \pm \text{Sin. } u. \sqrt{-1})^3 = \text{Cos. } 3u \pm \text{Sin. } 3u. \sqrt{-1}$; & generalement $(\text{Cos. } u \pm \text{Sin. } u \sqrt{-1})^n = \text{Cos. } nu. \pm \text{Sin. } nu. \sqrt{-1}$.

LXXVI.

COROLLAIRE. 2. On tire de la derniere equation ces deux autres, $\text{Sin. } nu \sqrt{-1} = (\text{Cos. } u + \text{Sin. } u. \sqrt{-1})^n - \text{Cos. } nu$, & $\text{Sin. } nu \sqrt{-1} = \text{Cos. } nu - (\text{Cos. } u - \text{Sin. } u \sqrt{-1})^n$ ajoutant ces deux valeurs & diviſant par $2\sqrt{-1}$, on trouve l' equation ſuivante.

$$\text{Sin. } nu. = \frac{(\text{Cos. } u + \text{Sin. } u \sqrt{-1})^n - (\text{Cos. } u - \text{Sin. } u \sqrt{-1})^n}{2\sqrt{-1}}$$

On trouve de même.

$$\text{Cos. } nu = \frac{(\text{Cos. } u + \text{Sin. } u \sqrt{-1})^n + (\text{Cos. } u - \text{Sin. } u \sqrt{-1})^n}{2}$$

LXXVII.

COROLLAIRE. 3. En elevant ces deux binomes a la puiſſance n par la formule generale de Newton, on trouve ces deux formules ſans imaginaires $\text{Sin. } nu = \frac{n}{1} \cdot (\text{Cos. } u)^{n-1} \times \text{Sin. } u. - \frac{n.(n-1).(n-2)}{1.\ \ 2.\ \ 3.} (\text{Cos. } u)^{n-3}$ $\times$

$\times (\text{Sin.}\, u)^3 + \frac{n(n-1).(n-2).(n-3).(n-4)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.} (\text{Cos.}\, u)^{n-5}$

$\times (\text{Sin.}\, u)^5$ — &c.

$\text{Cos.}\, nu = (\text{Cos.}\, u)^n - \frac{n.(n-1)}{1.\ 2}. (\text{Cos.}\, u)^{n-2} \times$

$(\text{Sin.}\, u)^2 + \frac{n.(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.}. (\text{Cos.}\, u)^{n-4} \times$

$(\text{Sin.}\, u)^4 - \frac{n(n-1).(n-2).(n-3).(n-4).(n-5)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.}.(\text{Cos.}\, u)^{n-6} \times$

$(\text{Sin.}\, u)^6$ + &c.

LXXVIII.

COROLLAIRE 4. Si l'on fuppofe que l'arc u foit infiniment petit, on aura Sin. $u = u$, & Cos. $u = 1$; & pour rendre l'arc nu d'une grandeur finie, il faudra que n devienne infiniment grand; ce qui reduira les produits $n.(n-1)$, $n(n-1).(n-2)$, $n.(n-1).(n-2).(n-3)$, &c. aux puiffances n^2, n^3, n^4, &c. Si donc on fait l'arc fini $z = nu$, on aura $\frac{z}{n} = u =$ Sin. u, $\frac{z^2}{n^2} = (\text{Sin.}\, u)^2$, $\frac{z^3}{n^3} = (\text{Sin.}\, u)^3$ &c.; Cos. $u = 1$; par confequent toutes les puiffances de Cos. u feront egales a l'unité; & en fubftituant ces valeurs dans les deux formules du Cor. 3, on aura

$$\text{Sin.} z = z - \frac{z^3}{1.\,2.\,3} + \frac{z^5}{1.\,2.\,3.\,4.\,5} - \frac{z^7}{1.\,2.\,3.\,4.\,5.\,6.\,7} + \&c.$$

$$\text{Cos.} z = 1 - \frac{z^2}{1.\,2} + \frac{z^4}{1.\,2.\,3.\,4} - \frac{z^6}{1.\,2.\,3.\,4.\,5.\,6} + \&c.$$

LXXIX.

LEMME 4. n etant un nombre impair, on a cette formule generale des puiſſances n de Sin. u.

$$2^{n-1}(\text{Sin.}\,u)^n = \pm \text{Sin.}\,n u \mp \frac{n}{1}.\text{Sin.}\,\overline{n-2}.\,u \pm \frac{n.\,\overline{n-1}}{1\,.\,2}\,\text{Sin.}\,\overline{n-4}.\,u \pm \frac{n.\,\overline{n-1}.\,\overline{n-2}}{1\,.\,2\,.\,3}\,\text{Sin.}\,\overline{n-6}.\,u \pm \&c.$$

$$\ldots\ldots \pm \frac{n.\,\overline{n-1}.\,\overline{n-2}\ \&c.}{1\,.\,2\,.\,3\,.\ \&c.}\,\text{Sin.}\,u,$$ n etant un nombre pair, on a la formule ſuivante

$$2^{n-1}(\text{Sin.}\,u)^n = \pm \text{Cos.}\,nu \mp \frac{n}{1}\,\text{Cos.}\,\overline{n-2}.\,u \pm \frac{n.\,\overline{n-1}.}{1\,.\,2}\,\text{Cos.}\,\overline{n-4}.\,u \pm \frac{n.\,\overline{n-1}.\,\overline{n-2}}{1.\ \ 2.\ \ 3}\,\text{Cos.}\,\overline{n-6.}\,u \pm \&c.$$

$$\ldots\ldots\ \mp \frac{1}{2}\left(\frac{n.\,\overline{n-1}.\,\overline{n-2}.\ \&c.}{1\,.\,2\,.\,3\,.\ \&c.}\right) \times \text{Cos.}\,o.\,u.$$

Dans la premiere de ces deux formules, on ſe ſervira du ſigne ſuperieur lorſque $n=4m+1$, & du ſigne inferieur lorſque $n=4m-1$; m etant un nombre quelconque: dans la ſeconde formule, on ſe ſervira du ſigne ſuperieur, lors que $n=4m$, m etant un nombre quelconque; & l'on prendra le ſigne inferieur, lorſque

$n = 2m$, m etant un nombre impair quelconque il faut encore remarquér que dans la premiere formule il faut s' arreter au terme qui eſt terminé par Sin. u; & que dans la ſeconde formule il faut s' arreter acelui qui eſt terminé par Cos. $o.u = 1$, & le diviſer par 2.

n. etant un nombre poſitif quelconque, on a la formule ſuivante pour les puiſſances du coſinus.

$$2^{n-1} (\text{Cos. } u)^n = \text{Cos. } nu + \tfrac{n}{1}.\ \text{Cos. } \overline{n-2}.u + \frac{n.\,n-1}{1\,.\,2}\ \text{Cos. } \overline{n-4}.u + \frac{n.\,n-1.\,n-2}{1\,.\,2\,.\,3}\ \text{Cos. } \overline{n-6}.u \ldots\ldots + \frac{n.\,n-1.\,n-2\ \&c.}{1\,.\,2\,.\,3\ \&c.} \times \text{Cos. } \overline{n-n}.u,$$

ou $\times$ Cos. u, Selon que n eſt un nombre pair ou impair.

LXXX.

LEMME 5. $\text{tang.} = \frac{\text{Sin.}}{\text{Cos.}}$, $\text{Cot.} = \frac{\text{Cos.}}{\text{Sin.}} = \frac{1}{\text{tang.}}$, $\text{Sec.} = \frac{1}{\text{Cos.}}$, $\text{Coſec.} = \frac{1}{\text{Sin.}}$, $\text{Sin. ver.} = 1 - \text{Cos.}$, d' ou l' on tire: $\text{tang.} \times \text{Cos.} = \text{Sin.} = \frac{\text{Cos.}}{\text{Cot.}}$; $\text{Sec.} \times \text{Cos.} = 1$; $\text{Coſec.} \times \text{Sin.} = 1$; $\text{tang.} \times \text{Cot.} = 1$; $\text{Sinus. vers.} + \text{Cos.} = 1$. On peut auſſi au moyen de ces equations appliquer aux Tangentes, Cotangentes, Secantes, Coſecantes & Sinus verſes, les formules generales qu'on a trouvées pour les Sinus & Coſinus; par exemple puiſque $\text{Tang.} = \frac{\text{Sin.}}{\text{Cos.}}$ On

aura par le Cor. 4. du Lem. 3. cette formule generale.

$$\text{Tang.}\, z = \frac{z - \frac{z^3}{1.\,2.\,3.} + \frac{z^5}{1.\,2.\,3.\,4.\,5.} - \frac{z^7}{1.\,2.\,3.\,4.\,5.\,6.\,7.} + \&c.}{1 - \frac{z^2}{1.\,2.} + \frac{z^4}{1.\,2.\,3.\,4.} - \frac{z^6}{1.\,2.\,3.\,4.\,5.\,6.} + \&c.}.$$

LXXXI.

THEOREME I. u etant toujours un arc de cercle dont le rayon eſt 1, on aura.

1°. $du = \frac{d.\,\text{Sin.}\,u}{\text{Cos.}\,u}$, par conſequent d. Sin. $u = du \times \text{Cos.}\,u$, $u = S.\,\frac{d.\,\text{Sin.}\,u}{\text{Cos.}\,u.}$ & Sin. $u = S.\,du \times \text{Cos.}\,u$

2°. $du = -\frac{d.\,\text{Cos}\,u}{\text{Sin.}\,u}$, par conſequent d. Cos. $u = -du \times \text{Sin.}\,u$, $u = S.-\frac{d.\,\text{Cos.}\,u}{\text{Sin.}\,u}$, & Cos. $u = S - du\,\text{Sin.}\,u$

3°. $u = \frac{1}{\sqrt{-1}} L.(\,\text{Sin.}\,u\sqrt{-1} + \text{Cos.}\,u\,)$.

4°. $u = \frac{1}{2\sqrt{-1}}.L.\left(\frac{\text{Cos.}\,u + \text{Sin.}\,u\sqrt{-1}}{\text{Cos.}\,u - \text{Sin.}\,u\sqrt{-1}}\right)$

La premiere & la ſeconde parties de ce Theoreme ont eté demontrées (Art. LIII.) ou Nous avons fait voir que ſi l' on ſuppoſe ſin $u = x$, & par conſequent Cos. $u = \sqrt{1-xx}$, on a $du = \frac{dx}{\sqrt{1-xx}}$; & que ſi l'on ſuppoſe Cos. u

$= x$, & par consequent Sin. $u = \sqrt{1-xx}$, on a $du = -\frac{dx}{\sqrt{1-xx}}$.

On demontre la troisieme partie, en prouvant que la différentielle $du.\sqrt{-1}$ est egale a la différentielle logarithmique de Sin. $u\sqrt{-1}$ + Cos. u, ou que, $du.\sqrt{-1} = \frac{d.\text{Sin.}u.\sqrt{-1} + d.\text{Cos.}u}{\text{Sin.}u.\sqrt{-1} + \text{Cos.}u}$, ou encore que $-$ Sin. $u\,du$ + Cos. $u\,du.\sqrt{-1} = d.$Sin. $u.\sqrt{-1} + d.$Cos. u Or par la 1e. partie de ce Theoreme. $d.$ Sin. $u\sqrt{-1}$ = Cos. $u\,du.\sqrt{-1}$, & par la 2^e. partie $d.$ Cos. $u = -$Sin. $u\,du$. Donc $d.$ Sin. $u.\sqrt{-1} + d.$Cos. $u = -$ Sin. $u\,du$ + Cos. $u\,du.\sqrt{-1}$ *C. Q. F. D.*

Pour demontrer la quatrieme partie, il suffit de prouver que $\frac{1}{\sqrt{-1}}.L$ (Sin. $u\sqrt{-1}$ + Cos. u) $= \frac{1}{2\sqrt{-1}}.L\left(\frac{\text{Cos.}u + \text{Sin.}u.\sqrt{-1}}{\text{Cos.}u - \text{Sin.}u\sqrt{-1}}\right)$, ou que $2\,L.$ (Sin. $u\sqrt{-1}$ + Cos. u) $= L\left(\frac{\text{Cos.}u + \text{Sin.}u.\sqrt{-1}}{\text{Cos.}u - \text{Sin.}u.\sqrt{-1}}\right)$, ou encore que (Sin. $u\sqrt{-1}$ + Cos. $u)^2 = \frac{\text{Cos.}u + \text{Sin.}u.\sqrt{-1}}{\text{Cos.}u - \text{Sin.}u.\sqrt{-1}}$, ou que Sin

$u\sqrt{-1} + \text{Cos.}\, u = \frac{1}{\text{Cos.}\, u - \text{Sin.}\, u\sqrt{-1}}$, ou en fin que $(\text{Sin.}\, u\sqrt{-1} + \text{Cos.}\, u) \times (\text{Cos.}\, u - \text{Sin.}\, u\sqrt{-1}) = 1$. Cequi eſt evident par le Lemme 3. donc &c. *C. Q. F. D.*

LXXXII.

COROLLAIRE 1. En multipliant la formule $u = \frac{1}{\sqrt{-1}} L.(\text{Cos.}\, u + \text{Sin.}\, u\sqrt{-1})$ par un nombre quelconque n, on aura $nu = \frac{n}{\sqrt{-1}} L.(\text{Cos.}\, u + \text{Sin.}\, u\sqrt{-1})$ $= L.\left(\text{Cos.}\, u + \text{Sin.}\, u\sqrt{-1}\right)^{\frac{n}{\sqrt{-1}}} = L.\, (\text{Cos.}\, u + \text{Sin.}\, u.\sqrt{-1})^{-n\sqrt{-1}} = L. \frac{1}{(\text{Cos.}\, u. + \text{Sin.}\, u.\sqrt{-1})^{n\sqrt{-1}}}$ $= L.\, (\text{Cos.}\, u - \text{Sin.}\, u\sqrt{-1})^{n\sqrt{-1}}$; Car $\frac{n}{\sqrt{-1}} = \frac{n.\sqrt{-1}}{(\sqrt{-1})^2} = \frac{n\sqrt{-1}}{-1} = -n\sqrt{-1}$; & par le lem. 3. $\frac{1}{\text{Co.}\, u + \text{Sin.}\, u.\sqrt{-1}} = \text{Cos.}\, u - \text{Sin.}\, u\sqrt{-1}$.

LXXXIII.

COROLLAIRE 2. Puiſque $nu = \frac{n}{\sqrt{-1}} L.$ (Cos. u

$+ \text{Sin.}\, u \sqrt{-1})$; en multipliant de part & d'autre par $\sqrt{-1}$, on aura $nu\sqrt{-1} = n L. (\text{Cos.}\, u + \text{Sin.}\, u \sqrt{-1}) = L. (\text{Cos.}\, u + \text{Sin.}\, u \sqrt{-1})^n = L. \frac{1}{(\text{Cos.}\, u + \text{Sin.}\, u \sqrt{-1})^{-n}} = L. (\text{Cos.}\, u - \text{Sin.}\, u \sqrt{-1})^{-n}$.

LXXXIV.

COROLLAIRE. 3. Supposé que e soit un nombre dont le logarithme est l'unité, ou $Le = 1$; on aura (par le Cor. 1.) $nu.\ Le = L. (\text{Cos.}\, u + \text{Sin.}\, u \sqrt{-1})^{-n\sqrt{-1}} = L. (\text{Cos.}\, u - \text{Sin.}\, u \sqrt{-1})^{n\sqrt{-1}}$, ou $L.\ e^{nu} = L. (\text{Cos.}\, u + \text{Sin.}\, u \sqrt{-1})^{-n\sqrt{-1}} = L. (\text{Cos.}\, u - \text{Sin.}\, u\sqrt{-1})^{n\sqrt{-1}}$; par consequent $e^{nu} = (\text{Cos.}\, u + \text{Sin.}\, u\sqrt{-1})^{-n\sqrt{-1}} = (\text{Cos.}\, u - \text{Sin.}\, u \sqrt{-1})^{n\sqrt{-1}}$.

LXXXV.

COROLLAIRE 4. Dans la même supposition de $Le = 1$; on aura par le Cor. 2. $e^{nu\sqrt{-1}} = (\text{Cos.}\, u + \text{Sin.}\, u \sqrt{-1})^n = (\text{Cos.}\, u - \text{Sin.}\, u \sqrt{-1})^{-n}$; par consequent $e^{-nu\sqrt{-1}} = \frac{1}{e^{nu\sqrt{-1}}} = (\text{Cos.}\, u + \text{Sin.}$

$u\sqrt{-1})^{-n} = (\text{Cos.}\, u - \text{Sin.}\, u\sqrt{-1})^{+n}$. Or par le Cor. 2. du Lemme 3.

$$\text{Sin.}\, nu = \frac{(\text{Cos.}\, u + \text{Sin.}\, u \sqrt{-1})^n - (\text{Cos.}\, u - \text{Sin.}\, u \sqrt{-1})^n}{2\sqrt{-1}},$$

& $\text{Cos.}\, nu = \frac{1}{2}(\text{Cos.}\, u + \text{Sin.}\, u\sqrt{-1})^n + \frac{1}{2}(\text{Cos.}\, u - \text{Sin.}\, u\sqrt{-1})^n$. Donc

$$\text{Sin.}\, nu = \frac{e^{nu\sqrt{-1}} - e^{-nu\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$$

$$\text{Cos.}\, nu = \frac{e^{nu\sqrt{-1}} + e^{-nu\sqrt{-1}}}{2}$$

Et si l'on suppose $n = 1$, on aura $\text{Sin.}\, u = \frac{e^{u\sqrt{-1}} - e^{-u\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$, & $\text{Cos.}\, u = \frac{e^{u\sqrt{-1}} + e^{-u\sqrt{-1}}}{2}$.

LXXXVI.

COROLLAIRE 5. Si l'arc u & le nombre n sont réels, les logarithmes imaginaires $\frac{n}{\sqrt{-1}} L.(\text{Cos.}\, u + \text{Sin.}\, u\sqrt{-1})$ ou $L.(\text{Cos.}\, u + \text{Sin.}\, u\sqrt{-1})^{-n\sqrt{-1}}$, & $n\sqrt{-1}.L(\text{Cos.}\, u - \text{Sin.}\, u\sqrt{-1})$ ou $L(\text{Cos.}\, u - \text{Sin.}\, u\sqrt{-1})^{n\sqrt{-1}}$ seront des quantites réelles $= nu$, par le Cor.

Cor. 1; & dans les mêmes suppositions les quantites exponentielles $(\text{Cos.}\,u + \text{Sin.}\,u\sqrt{-1})^{-n\sqrt{-1}}$ & $(\text{Cos.}\,u - \text{Sin.}\,u\sqrt{-1})^{n\sqrt{-1}}$ seront aussi réelles & $= e^{nu}$ aussibien que les exponentielles $\frac{e^{nu\sqrt{-1}} - e^{-nu\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} = \text{Sin.}\,nu$, & $\frac{e^{nu\sqrt{-1}} + e^{-nu\sqrt{-1}}}{2} = \text{Cos.}\,nu$:

Au contraire les Logarithmes $L.(\text{Cos.}\,u + \text{Sin.}\,u\sqrt{-1})^n$, & $L.(\text{Cos.}\,u - \text{Sin.}\,u\sqrt{-1})^n$ seront des quantites imaginaires $e^{nu\sqrt{-1}}$ & $e^{-nu\sqrt{-1}}$.

LXXXVII.

THEOREME 2. 1°. $du = \frac{d.\,\text{Tang.}\,u}{1 + (\text{Tang.}\,u)^2} = \frac{d.\text{Tang.}\,u}{(\text{Sec.}\,u)^2}$; par consequent $du(1 + \overline{\text{Tang.}\,u}^2) = du(\text{Sec.}\,u)^2 = d.\,\text{Tang.}\,u$; $u = S.\,\frac{d.\,\text{Tang.}\,u}{1 + (\text{Tang.}\,u)^2} = S.\,\frac{d.\,\text{Tang.}\,u}{(\text{Sec.}\,u)^2} = S.\,d.\,\text{Tang.}\,u\,\overline{\text{Cos.}\,u}^2$.

2°. $u = \frac{1}{2\sqrt{-1}}.\,L\left(\frac{1 + \text{Tang.}\,u\sqrt{-1}}{1 - \text{Tang.}\,u\sqrt{-1}}\right)$.

3°. $\text{Tang.}\,u = \frac{e^{2u\sqrt{-1}} - 1}{(e^{2u\sqrt{-1}} + 1)\sqrt{-1}}$, en suppofant $L.e = 1$.

La premiere partie de ce theoreme a eté demontreé (Art. LIII.), ou ayant fuppofé $\text{Tang.}\,u = x$ & par confequent $(\text{Sec.}\,u)^2 = 1 + xx$, on a trouvé $du = \frac{dx}{1+xx}$.

DEMONSTRATION de la feconde partie. $\text{Tang.}\,u = \frac{\text{Sin.}\,u}{\text{Cos.}\,u}$, ou $\text{Sin.}\,u = \text{Tang.}\,u\,\text{Cos.}\,u$, (Lem. 5.). Donc en fubftituant $\text{Tang.}\,u\,\text{Cos.}\,u\sqrt{-1}$ au lieu de $\text{Sin.}\,u\sqrt{-1}$ dans la formule $u = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \cdot L.\frac{\text{Cos.}\,u + \text{Sin.}\,u\sqrt{-1}}{\text{Cos.}\,u - \text{Sin.}\,u\sqrt{-1}}$ trouvée dans le theoreme 1., on aura $u = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \times L.\left(\frac{\text{Cos.}\,u + \text{Tang.}\,u\,\text{Cos.}\,u\sqrt{-1}}{\text{Cos.}\,u - \text{Tang.}\,u\,\text{Cos.}\,u\sqrt{-1}}\right)$, & en divifant le numerateur & le denominateur par $\text{Cos.}\,u$ on a, $u = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \cdot L.\left(\frac{1 + \text{Tang.}\,u\sqrt{-1}}{1 - \text{Tang.}\,u\sqrt{-1}}\right)$ *C. Q. F. D.*

On demontre de même la 3e partie. Car quifquè par le theoreme precedent $\text{Sin.}\,u = \frac{e^{u\sqrt{-1}} - e^{-u\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$,

& $\text{Cos.}\, u = \frac{e^{u\sqrt{-1}} + e^{-u\sqrt{-1}}}{2}$; on aura $\text{Tang.}\, u = \frac{\text{Sin.}\, u}{\text{Cos.}\, u}$

$$= \frac{e^{u\sqrt{-1}} - e^{-u\sqrt{-1}}}{\sqrt{-1}\left(e^{u\sqrt{-1}} + e^{-u\sqrt{-1}}\right)} = \frac{e^{2u\sqrt{-1}} - 1}{\sqrt{-1}\left(e^{2u\sqrt{-1}} + 1\right)},$$

en divisant le numerateur & le denominateur par $e^{-u\sqrt{-1}}$. *C. Q. F. D.*

LXXXVIII.

COROLLAIRE. Puis que $\text{Tang.}\, u = \frac{1}{\text{Cot.}\, u}$ (Lem. 5.) en substituant $\frac{1}{\text{Cot.}\, u}$ au lieu de $\text{Tang.}\, u$ dans les deux dernieres formules du theoreme precedent, on aura.

$$1^{\circ}\; u = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\, L.\left(\frac{\text{Cot.}\, u + \sqrt{-1}}{\text{Cot.}\, u - \sqrt{-1}}\right).$$

$$2^{\circ}\; \text{Cot.}\, u = \frac{\left(e^{2u\sqrt{-1}} + 1\right)\sqrt{-1}}{e^{2u\sqrt{-1}} - 1}.$$

LXXXIX.

THEOREME 3. $du = -d.\text{Cot.}\, u\, \overline{\text{Sin.}\, u}^{2}$; par consequent $u = S - d.\text{Cot.}\, u.\, \overline{\text{Sin.}\, u}^{2}$, $d.\text{Cot.}\, u = -\frac{du}{(\text{Sin.}\, u)^2}$, & $\text{Cot.}\, u = S - \frac{du}{(\text{Sin.}\, u)^2}$.

DEMONSTRATION. $du = \frac{d. \text{Tang.} u}{(\text{Sec.} u)^2} = d. \text{Tang.} u\, (\text{Cos.} u)^2$ par le Theoreme 3. or $\text{Tang.} u = \frac{1}{\text{Cot.} u} = \frac{\text{Sin.} u}{\text{Cos.} u}$ par le Lem. 5.; par consequent $d. \text{Tang.} u = -\frac{d. \text{Cot.} u}{(\text{Cot.} u)^2} = - d. \text{Cot.} u. \frac{\overline{\text{Sin.} u}^2}{(\text{Cos.} u)^2}$. Donc $du = - d. \text{Cot.} u\, (\text{Sin.} u)^2$. *C. Q. F. D.*

XC.

COROLLAIRE. Puisque (Lem. 5.), $\text{Cosec.} u = \frac{1}{\text{Sin.} u}$; on aura aussi $du = -\frac{d. \text{Cot.} u}{(\text{Cosec.} u)^2}$, $u = S \frac{-d. \text{Cot.} u}{(\text{Cosec.} u)^2}$, $d.\text{Cot.} u = - du. (\text{Cosec.} u)^2$, & $\text{Cot.} u = S. - du\, (\text{Cosec.} u)^2$.

XCI.

THEOREME 4. $du = \frac{d.\text{Sec.} u\, (\text{Cos.} u)^2}{\text{Sin.} u}$; par consequent $u = S. \frac{d. \text{Sec.} u\, (\text{Cos.} u.)^2}{\text{Sin.} u}$, & $d. \text{Sec.} u = \frac{du\, \text{Sin.} u}{(\text{Cos.} u.)^2}$, & $\text{Sec.} u = S. \frac{du\, \text{Sin.} u}{(\text{Cos.} u)^2}$.

DEMONSTRATION. $\text{Sec.} u = \frac{1}{\text{Cos.} u}$ (Lem. 5.); en différentiant $d. \text{Sec.} u = -\frac{d. \text{Cos.} u}{(\text{Cos.} u)^2}$, $d. \text{Sec.} u. (\text{Cos.} u)^2 =$

$-d\,\text{Cos.}u$, $\frac{d.\text{Sec.}\,u\,(\text{Cos.}\,u)^2}{\text{Sin.}\,u} = -\frac{d.\,\text{Cos.}\,u}{\text{Sin.}\,u} = du$. (Theore. 1.). *C. Q. F. D.*

XCII.

COROLLAIRE 1. Puisque (Lem. 5.) $\frac{\text{Sin.}\,u}{\text{Cos.}\,u} = \text{Tang.}\,u$, & $\frac{1}{\text{Cos.}\,u} = \text{Sec.}\,u$; on aura $\frac{\text{Sin.}\,u}{(\text{Cos.}\,u)^2} = \text{Sec.}\,u.\,\text{Tang.}\,u$, & $\frac{(\text{Cos.}\,u)^2}{\text{Sin.}\,u} = \frac{1}{\text{Sec.}u\,\text{Tang.}u}$. Donc $du = \frac{d.\,\text{Sec.}\,u\,(\text{Cos.}\,u)^2}{\text{Sin.}\,u} = \frac{d.\,\text{Sec.}\,u}{\text{Sec.}\,u\,\text{Tang.}\,u}$; $u = S.\,\frac{d.\,\text{Sec.}\,u.}{\text{Sec.}\,u\,\text{Tang.}\,u}$, $d.\,\text{Sec.}\,u. = du.\,\text{Sec.}\,u.\,\text{Tang.}\,u$, & $\text{Sec.}\,u = S.\,du.\,\text{Sec.}\,u.\,\text{Tang.}\,u.$

XCIII.

COROLLAIRE 2. Puisque $\frac{1}{\text{Sin.}\,u} = \text{Cosec.}\,u$ (Lem. 5.) $du = d.\,\text{Sec.}\,u\,(\text{Cos.}\,u)^2.\,\text{Cosec.}\,u$; & $u = S.\,d.\,\text{Sec.}\,u.\,(\text{Cos.}\,u.)^2.\,\text{Cosec.}\,u$; & puisque $\text{Cot.}\,u = \frac{\text{Cos.}\,u}{\text{Sin.}\,u}$, on aura aussi $du = d.\,\text{Sec.}\,u.\,\text{Cot.}\,u.\,\text{Cos.}\,u.$, $u = S.\,d.\,\text{Sec.}\,u.\,\text{Cot.}\,u.\text{Cos.}\,u$; $d.\text{Sec.}\,u = \frac{du}{\text{Cot.}\,u\ \text{Cos.}\,u}$, & $\text{Sec.}\,u = S.\,\frac{du}{\text{Cot.}u\,\text{Sin.}u}$.

XCIV.

THEOREME 5. $du = -\frac{d.\,\text{Cosec.}\,u\,(\text{Sin.}\,u)^2}{\text{Cos.}\,u}$; $u = S -$

$\frac{d \text{Cosec.} u (\text{Sin.} u)^2}{\text{Cos.} u}$; $d.$ Cosec. $u = -\frac{du \text{ Cos.} u}{(\text{Sin.} u)^2}$, & Cosec. $u =$ $S. - \frac{du. \text{Cos.} u}{(\text{Sin.} u)^2}$.

DEMONSTRATION. Cosec. $u = \frac{1}{\text{Sin.} u}$ (Lem. 5.); en différentiant, d Cosec. $u = -\frac{d \text{Sin.} u}{(\text{Sin.} u)^2}$; $-d$ Cosec. u $(\text{Sin.} u)^2$ $= d$ Sin. u, $-\frac{d \text{Cosec.} u. (\text{Sin.} u)^2}{\text{Cos.} u} = \frac{d \text{Sin.} u}{\text{Cos.} u} = du$ (Theoreme 1.) Donc &c. *C. Q. F. D.*

XCV.

COROLLAIRE. On peut au lieu de $\frac{(\text{Sin.} u)^2}{\text{Cos.} u}$ substituér différentes valeurs, qu'on trouve aisement par les formules du Lemme 5. Sec. $u = \frac{1}{\text{Cos.} u}$, Cosec. $u = \frac{1}{\text{Sin.} u}$ ou Sin. $u = \frac{1}{\text{Cosec.} u}$, $\frac{\text{Sin.} u}{\text{Cos.} u} =$ Tang. u, Cot. $u = \frac{\text{Cos.} u}{\text{Sin.} u}$ ou $\frac{\text{Sin.} u}{\text{Cos.} u} = \frac{1}{\text{Cot.} u}$; par exemple en substituant cette derniere valeur $\frac{1}{\text{Cot.} u}$ au lieu de $\frac{\text{Sin.} u}{\text{Cos.} u}$, on aura $du = -\frac{d \text{Cosec.} u \text{ Sin.} u}{\text{Cot.} u} = -d$ Cosec. u. Tang. u. Sin. u.

XCVI.

THEOREME 6. $du = \frac{d \text{Sin. ver.} u}{\text{Sin.} u}$; par consequent

$u = S.\frac{d\,\text{Sin. ver.}\,u}{\text{Sin.}\,u}$, $d.$ Sin. ver. $u = du.$ Sin. u, Sin. ver. $u = S.du.$ Sin. u.

Car. Sin. ver. $u = 1 -$ Cos. u; en différentiant $d.$ Sin. ver. $u = -d$ Cos. u; $\frac{d\,\text{Sin. vers.}\,u}{\text{Sin.}\,u} = -\frac{d\,\text{Cos.}\,u}{\text{Sin.}\,u} = du.$ (Theoreme 1.) *C. Q. F. D.*

XCVII.

LEMME. $(\text{Cos.}\varphi + \sqrt{-1}\ \text{Sin.}\varphi)^m = \text{Cos.}\, m\varphi + \sqrt{-1}\ \text{Sin.}\, m\varphi$, φ denotant un angle quelconque, & m un nombre quelconque. Ce Lemme a dejá eté demontré (LXXIV.) par les ſeuls principes de Trigonometrie; mais nous joindrons ici une autre demonſtration dependante du Calcul différentiel, dont nous ferons uſage en ſuite. En prenant les logarithmes, on aura par la ſuppoſition. $m L.(\text{Cos.}\varphi + \sqrt{-1}\ \text{Sin.}\varphi) = L.(\text{Cos.}\, m\varphi + \sqrt{-1}\ \text{Sin.}\, m\varphi)$, & en différentiant, traitant l'angle φ, comme variable, on aura (LXXXI.)

$$-\frac{m\,d\varphi\,\text{Sin.}\,\varphi + m\,d\varphi\sqrt{-1}\ \text{Cos.}\,\varphi}{\text{Cos.}\,\varphi + \sqrt{-1}\ \text{Sin.}\,\varphi} =$$

$$-\frac{m\,d\varphi\,\text{Sin.}\,m\varphi + m\,d\varphi\sqrt{-1}\ \text{Cos.}\,m\varphi}{\text{Cos.}\,m\varphi + \sqrt{-1}\ \text{Sin.}\,m\varphi},$$

& multipliant les numerateurs par $-\sqrt{-1}$, on aura,

$$md\varphi\frac{(\text{Cos.}\,\varphi+\sqrt{-1}\,\text{Sin.}\,\varphi)}{\text{Cos.}\,\varphi+\sqrt{-1}\,\text{Sin.}\,\varphi}=md\varphi\frac{(\text{Cos.}\,m\varphi+\sqrt{-1}\,\text{Sin.}\,m\varphi)}{\text{Cos.}\,m\varphi+\sqrt{-1}\,\text{Sin.}\,m\varphi},$$

c'eſt adire, $md\varphi=md\varphi$, equation identique; donc &c.

XCVIII.

THEOREME 7. Toutes les quantités imaginaires de quelque forme qu'elles ſoient, pouvent toujours ſe reduire a l'expreſſion $M+N\sqrt{-1}$, dans la quelle M, N, ſont des quantités réelles.

DEMONSTRATION. Nous diſtinguerons toutes les formes poſſibles des quantités imaginaires.

1. Soit $a+b\sqrt{-1}$, une quantité imaginaire & m l'expoſant réel de la puiſſance $(a+b\sqrt{-1})^m$, on pourra toujours reduire cette expreſſion a la forme $M+N\sqrt{-1}$. Faiſons $\sqrt{aa+bb}=c$, & cherchons l'angle φ, tel que ſon Sinus ſoit $=\frac{b}{c}$, & le Coſinus $=\frac{a}{c}$; il eſt clair qu'on pourra toujours trouvér cet angle φ, quelques ſoient les quantités a, b, pourvû qu'elles ſoient reelles. Or aiant trouvé cet angle φ, qui ſera toujours réel, on aura en même temps tous les autres angles dont le Sinus $\frac{b}{c}$ & le Coſinus $\frac{a}{c}$ ſont les mêmes. Car prenant π, pour l'angle de 180°, tous ces angles ſeront φ, $2\pi+\varphi$, $4\pi+\varphi$, $6\pi+\varphi$, $8\pi+\varphi$ &c.

aux

aux quels on peut ajoutér ceux cy $-2\pi+\varphi$, $-4\pi+\varphi$, $-6\pi+\varphi$, $-8\pi+\varphi$ &c. Cela ſuppoſé, on aura $a+b\sqrt{-1}=c(\text{Cos. }\varphi+\sqrt{-1}.\text{ Sin. }\varphi.)$ & la puiſſance propoſée $(a+b\sqrt{-1})^m=c^m(\text{Cos. }\varphi+\sqrt{-1}.\text{ Sin. }\varphi.)^m$. Or (Lem. prec.) $(\text{Cos. }\varphi+\sqrt{-1}.\text{ Sin. }\varphi)^m=\text{Cos. }m\varphi+\sqrt{-1}.\text{ Sin. }m\varphi$. Donc $(a+b\sqrt{-1})^m=c^m(\text{Cos. }m\varphi+\sqrt{-1}.\text{ Sin. }m\varphi.)$ & par conſequent en faiſant $M=c^m.\text{ Cos. }m\varphi$, & $N=c^m.\text{ Sin. }m\varphi$, la puiſſance $(a+b\sqrt{-1})^m$, ſe reduit a la forme $M+N\sqrt{-1}$.

2°. On pourra toujours reduire a l' expreſſion $M+N\sqrt{-1}$, toute quantité réelle poſitive, dont l' expoſant eſt une quantité imaginaire. Soit a, une quantité réelle poſitive, & $m+n\sqrt{-1}$ l' expoſant de la puiſſance, de ſorte qu'il faille cherchér la valeur imaginaire de $a^{m+n\sqrt{-1}}$. Soit fait $a^{m+n\sqrt{-1}}=x+y\sqrt{-1}.$, on aura $(m+n\sqrt{-1})L.a=L.(x+y\sqrt{-1})$, & en prenant les différences, ſuppoſant a, x, y, variables, on aura $\frac{m\,da}{a}+\frac{n\,da\sqrt{-1}}{a}=\frac{dx+dy\sqrt{-1}}{x+y\sqrt{-1}}=\frac{x\,dx+y\,dy}{xx+yy}+\left(\frac{x\,dy-y\,dx}{xx+yy}\right)\times$

$\sqrt{-1}$; & egalant feparément les nombres réels & imaginaires, nous aurons ces deux equations $\frac{m\,da}{a} = \frac{x\,dx + y\,dy}{xx + yy}$, & $\frac{n\,da\sqrt{-1}}{a} = \left(\frac{x\,dy - y\,dx}{xx + yy}\right)\sqrt{-1}$, ceft a dire $\frac{n\,da}{a} = \frac{x\,dy - y\,dx}{xx + yy}$, & en intégrant, $m\,La = L.\sqrt{xx + yy}$, dou l'on tire $a^m = \sqrt{xx + yy}$, & $n\,La$, egal a un arc A dont la tangente eft $\frac{y}{x}$; ou $\frac{y}{x} = \text{Tang.}\,n\,L.\,a$, dans laquelle egalité $L.\,a$ marque le logarithme hyperbolique de la quantité réelle pofitive a, laquelle aura par confequent une valeur réelle. Prenant donc dans un cercle dont le raïon $= 1$, un arc $= n\,L.\,a$, on aura a caufe de $\sqrt{xx + yy} = a^m$, $x = a^m.\,\text{Cos.}\,n\,L.\,a$, & $y = a^m.\,\text{Sin.}\,n\,L.\,a$, les quelles valeurs etant fubftituées a la place de x & y on trouvera $a^{m + n\sqrt{-1}} = x + y\sqrt{-1} = a^m.\,\text{Cos.}\,n\,L.\,a + a^m.\,\text{Sin.}\,n\,L.\,a\sqrt{-1}$. Donc la quantité imaginaire $a^{m + n\sqrt{-1}}$ eft comprife dans la forme $M + N\sqrt{-1}$, puifque a, eft une quantité réelle pofitive.

3°. Il refte le cas d'une quantité imaginaire, telle que $a + b\sqrt{-1}$, elevée a une puiffance dont l'expofant foit ima-

ginaire $m+n\sqrt{-1}$; ce cas eſt auſſi compris dans la forme $M+N\sqrt{-1}$ Car. ſoit $\overline{a+b\sqrt{-1}}^{\,m+n\sqrt{-1}} = x+y\sqrt{-1}$, on aura en prenant les logarithmes $(m+n\sqrt{-1})L.(a+b\sqrt{-1}) = L(x+y\sqrt{-1})$. Et en prenant les différences $d.L(x+y\sqrt{-1}) = \frac{xdx+ydy}{xx+yy} + \frac{(xdx-ydx)}{xx+yy}\sqrt{-1} = \frac{m(ada+bdb)}{aa+bb} + \frac{n(ada+bdb)\sqrt{-1}}{aa+bb} + \frac{m(adb-bda)\sqrt{-1}}{aa+bb} - \frac{n(adb-bda)}{aa+bb}$, & en egalant ſeparément les membres réels & imaginaires, on aura $\frac{m(ada+bdb)}{aa+bb} - \frac{n(adb-bda)}{aa+bb} = \frac{xdx+ydy}{xx+yy}$, & $\frac{m(adb-bda)}{aa+bb} + \frac{n(ada+bdb)}{aa+bb} = \frac{xdy-ydx}{xx+yy}$. Pour en prendre les intégrales, ſoient $\sqrt{aa+bb} = c$, & l'arc A dont la tangente $\frac{b}{a} = \varphi$, ou bien ſinus $\varphi = \frac{b}{c}$, & Cos. $\varphi = \frac{a}{c}$, d'ou l'on peut toujours trouvér l'angle φ; Car ſi l'on ſuppoſe que $c = \sqrt{aa+bb}$, nos intégrales ſeront $mL.c - n\varphi = L.\sqrt{xx+yy}$, $m\varphi + nL.c = A$. Tang. $\frac{y}{x}$, donc $\sqrt{xx+yy} = c^m e^{-n\varphi}$, mettant e pour le nombre dont le logarithme hyperbolique $= 1$. ainſi pour trou-

vér les valeurs de x, & de y, de l'equation $(a+b\sqrt{-1})^{m+n\sqrt{-1}} = x+y\sqrt{-1}$, aïant posé $c = \sqrt{aa+bb}$, & pris l'angle φ. tel que Cos. $\varphi = \frac{a}{c}$, & Sin. $\varphi = \frac{b}{c}$, on aura.

$$x = c^m e^{-n\varphi} \text{Cos.} (m\varphi + n L.c.)$$

$$y = c^m e^{-n\varphi} . \text{Sin.} (m\varphi + n L.c.).$$

Et par consequent $x+y\sqrt{-1} = (a+b\sqrt{-1})^{m+n\sqrt{-1}}$ est reductibile a la forme $M+N\sqrt{-1}$.

De plus si les exposans etoient eux mêmes des puissances dont les exposans fussent imaginaires, ils seroient encore compris sous la même forme; Car si α, β, ϑ, sont des quantités imaginaires de la forme $M+N\sqrt{-1}$, la quantité $a^{\beta^{\vartheta}}$ feroit aussi comprise dans la même forme, puis que l'exposant β^{ϑ} est reductible a cette forme.

4°. Il est evident que toute fonction formée par addition, soustraction, multiplication ou division d'autant de formules imaginaires que ce soit de cette forme $M+N\sqrt{-1}$, sera toujours comprise dans la même forme, $M+N\sqrt{-1}$. Car qu'on imagine plusieurs

formules imaginaires $\alpha+\beta\sqrt{-1}$; $\vartheta+\delta\sqrt{-1}$, $e+z\sqrt{-1}$, $n+\theta\sqrt{-1}$ &c., il eſt clair qu' en ajoutant enſemble ces formules, ou en retranchant quelques unes, l'expreſſion qui en reſultera ſera toujours compriſe dans la forme $M+N\sqrt{-1}$, en faiſant $\alpha+\vartheta+e+n=M$, & $\beta+\delta+z+\theta=N$. Il n' eſt pas moins clair que ſi on multiplie deux ou pluſieurs de ces formules, on aura un produit de la forme $M+N\sqrt{-1}$; Car le produit de deux, $\alpha+\beta\sqrt{-1}$ & $\vartheta+\delta\sqrt{-1}$, etant $\alpha\vartheta-\beta\delta+(\alpha\delta.+\beta\vartheta)\sqrt{-1}$ eſt de la même forme que $M+N\sqrt{-1}$, laquelle etant outre cela multipliée par, $e+z\sqrt{-1}$, donnera encore cette forme & ainſi de ſuite. Il ne s'agit donc plus que de la diviſion. Il eſt clair que ce cas ſe reduit toujours a une fraction de cette forme $\frac{A+B\sqrt{-1}}{C+D\sqrt{-1}}$, dans laquelle le numerateur & le denominateur ſont compoſés par les trois premieres operations, addition, ſouſtraction, multiplication, d'autant de formules imaginaires qu'on voudra de la forme $M+N\sqrt{-1}$, or cette fraction peut toujours ſe reduire a une autre dont le denominateur eſt réel, en multipliant haut & bas par $C-D\sqrt{-1}$;

car alors on aura $\frac{AC+BD+(BC-AD)\sqrt{-1}}{CC+BD}$, & en faisant $M=\frac{AC+BD}{CC+BD}$ & $N=\frac{BC-AD}{CC+BD}$, on aura cette forme $M+N\sqrt{-1}$.

5° Il eſt auſſi evident que toutes les puiſſances dont l'expoſant eſt un nombre entier poſitif d'une forme imaginaire $A+B\sqrt{-1}$, auront toujours la même forme $M+N\sqrt{-1}$, puiſque ces puiſſances ſe forment par la multiplication. De plus puiſque la puiſſance $(A+B\sqrt{-1})^n$ eſt contenue dans la forme $M+N\sqrt{-1}$, ſi n eſt un nombre entier poſitif; la même forme aura lieu, ſi n eſt un nombre entier negatif, car $(A+B\sqrt{-1})^{-n}$ eſt $=\frac{1}{(A+B\sqrt{-1})^n}$, qui ſe reduit a la forme $\frac{1}{M+N\sqrt{-1}}$, or cette forme ſe reduit en multipliant haut & bas par $M-N\sqrt{-1}$ a cette autre $\frac{M-N\sqrt{-1}}{MM+NN}$.

6° La forme generale $M+N\sqrt{-1}$, comprend auſſi le cas de $N=0$ & par conſequent toutes les quantités réelles. Donc joignant enſemble par les quatre operations precedentes, non ſeulement des formules imaginaires de la forme $M+N\sqrt{-1}$, mais auſſi des réel-

les; cette forme ſera toujours compriſe dans l'expreſſion $M + N\sqrt{-1}$. Enfin il peut arrivér que ce produit quoique formé de formules imaginaires devienne réel, les imaginaires ſe detruiſant mutuellement, ou rendant $N = o$, alors le produit de $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ par $\alpha - \beta\sqrt{-1}$ eſt réel.

7°. Enfin de quelque puiſſance qu'on extraye la racine ou d'une quantité réelle ou d'une imaginaire de la forme $M + N\sqrt{-1}$, les racines ſeront toujours ou réelles ou imaginaires de la même forme $M + N\sqrt{-1}$.

Soit m l'expoſant de la puiſſance dont on veut extraire la racine, de ſorte qu'on ait à conſiderér les valeurs de $\sqrt[m]{a}$, ou de $\sqrt[m]{a + b\sqrt{-1}}$, car celle-cy ſe change en celle-la, faiſant $b = o$. Il faut donc demontrér que $\overline{a + b\sqrt{-1}}^{\frac{1}{m}}$ eſt contenû dans la forme $M + N\sqrt{-1}$, quelque grand que ſoit le nombre m. Pour le demontrér ſoit cherché un angle φ tel que ſa tangente ſoit $= \frac{b}{a}$, ou en faiſant $\sqrt{aa + bb} = c$, ſoit pris l'angle φ, tel que ſon ſinus ſoit $= \frac{b}{c}$, & le coſinus $= \frac{a}{c}$, on aura $a + b\sqrt{-1} = c\,(\text{Cos.}\,\varphi + \sqrt{-1}.\,\text{Sin.}\,\varphi)$, puiſque Cos. $\varphi = \frac{a}{c}$, & Sin. $\varphi = \frac{b}{c}$. Car ces deux

expréssions sont identiques. Or il est demontré (XCVII.) qu'une puissance quelconque d'une telle forme comme $(\text{Cos.}\,\varphi + \sqrt{-1}\,.\,\text{Sin.}\,\varphi)^m$ est $= \text{Cos.}\, m\varphi + \sqrt{-1}\,.$ Sin $m\varphi$, quelque nombre que soit m, affirmatif, ou negatif, entier ou rompû ou même irrationel. Cela posé on aura $(a + b\sqrt{-1})^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{a + b\sqrt{-1}} = c^{\frac{1}{m}}$ $(\text{Cos.}\,\frac{1}{m}\varphi + \sqrt{-1}\,.\,\text{Sin.}\,\frac{1}{m}\varphi)$.

Donc puisque $c = \sqrt{aa + bb}$ est une quantité réelle & positive, & par consequent aussi l'angle φ, sa partie $\frac{1}{m}\varphi$ avec son sinus & son cosinus sont aussi des quantités réelles. Donc $\sqrt[m]{(a + b\sqrt{-1})}$ ou $(\text{Cos.}\,\frac{1}{m}\varphi + \sqrt{-1}\,.$ $\text{Sin.}\,\frac{1}{m}\varphi)\sqrt[m]{c}$, appartienent à la forme $M + N\sqrt{-1}$. Or m peut marquér un nombre quelconque. Donc en general l'expression $\overline{a + b\sqrt{-1}}^{\,m}$, quelque nombre que soit m positif, ou negatif, ou entier, ou rompû, ou même irrationel, est toujours comprise dans la forme $M + N\sqrt{-1}$. Donc par l'énumération de tous les cas possibles, nous avons demontré que toute expression imaginaire est reductible à la forme $M + N\sqrt{-1}$.

THEO-

XCIX.

THEOREME. La quantité imaginaire $a \pm b\sqrt{-1}$, dans la quelle a, & b font rèelles, peut toujours fe reduire à la forme Cos. $V \pm$ Sin. $V\sqrt{-1}$.

DEMONSTRATION. Soit pris l'arc V dans un cercle, dont le rayon eft $r = \sqrt{aa+bb}$, & prenant l'arc u dans un cercle, dont lo rayon eft l'unité, on aura Cos. $V = r$. Cos. u, & Sin. $V = r$. Sin. u, & par confequent $a+b\sqrt{-1} = r$. Cos. $u \pm r$. Sin. $u\sqrt{-1}$, en fuppofant que les arcs V & u font femblables, ou d'un même nombre de degrès. Car fi l'on prend l'arc V dans un cercle, dont le rayon $r = \sqrt{aa+bb}$, & qu'on faffe Cos. $V = a$, on aura Sin. $V = \sqrt{rr-(\text{Cos.}V)^2} = \sqrt{aa+bb-aa} = b$, & les arcs V, & u, étant femblables, on aura $1 : r =$ Cos. u : Cos. $V = r$. Cos. u & $1 : r =$ Sin. u : Sin. $V = r$. Sin. u. Donc r. Cos. $u \pm r$. Sin. $u\sqrt{-1} =$ Cos. $V \pm$ Sin. $V. \sqrt{-1}$ *C. Q. F. D.*

C.

COROLLAIRE I. Lorfque nous avons demontré que toute quantité imaginaire, peut fe reduire à la forme $M+N\sqrt{-1}$, M & N étant des quantités réelles, on doit fuppofér que M & N, peuvent auffi

etre $=0$. Car il eſt évident que $b\sqrt{-1}$, ne peut ſe reduire à la forme $M+N\sqrt{-1}$, à moins que l'on ne ſuppoſe $M=0$, & $N=b$; puiſqu'autrement dans l'équation $M+N\sqrt{-1}=b\sqrt{-1}$, la quantité réelle M, feroit égale à l'imaginaire $b-N\sqrt{-1}$; ce qui eſt contradictoire.

CI.

COROLLAIRE 2. Puiſque nous avons demontré que l'arc $u=\pm\frac{1}{\sqrt{-1}}$. L (Cos. $u\pm$ Sin. $u\sqrt{-1}$), en multipliant de part & d'autre par rn, on aura rnu $=\pm\frac{rn}{\sqrt{-1}}$ L. (Cos. $u\pm$ Sin. $u\sqrt{-1}$) $=L$. (Cos. $u\pm$ Sin. $u\sqrt{-1})^{\pm rn\sqrt{-1}}$, & (Cos. $u\pm$ Sin. $u\sqrt{-1})^{\pm rn\sqrt{-1}}$ $=e^{rnu}$, quantité toute réelle, lorſque r, n, u ſont réelles. Or la quantité $M+N\sqrt{-1}$ pouvant toujours ſe reduire à la forme r Cos. $u\pm r$ Sin. $u\sqrt{-1}$, on aura $\frac{M}{r}+\frac{N}{r}\sqrt{-1}=$ Cos. $u\pm$ Sin. $u\sqrt{-1}=$ $a+b\sqrt{-1}$, en faiſant $a=\frac{M}{r}$ & $b=\frac{N}{r}$; d'où l'on tire $(a+b\sqrt{-1})^{\pm rn\sqrt{-1}}=e^{run}$, quantité toute réelle. Donc lors qu'on dit que la quantité

$(a+b\sqrt{-1})^{m\sqrt{-1}}$; peut toujours ſe reduire à la forme $M+N\sqrt{-1}$, quelque ſoit m, on doit entendre que m étant une quantité réelle $=\pm rn$, N; ſera o, dans la formule $M+N\sqrt{-1}$; ce qu'il faut bien obſervér.

REMARQUE. On peut demontrér par les principes précédens le celebre Théoreme de M.r Cotes, & quoique nous n'en faſſions dans la ſuite aucun uſage, Nous ne devons pas omettre une propoſition auſſi fameuſe. Soit l'arc ſimple A, le double Coſinus ou la corde du complement de cet arc x, ſoit l'arc multiple nA, dont la corde du complement, ou le double Coſinus $2c$, & ſoit le diametre $2r$, on aura le double Coſinus, ou la corde du complement pour les arcs multiples.

$$\left.\begin{aligned} 0A &= 2r \\ 1A &= x \\ 2A &= x^2-2r^2 \\ 3A &= x^3-3r^2x \\ &\&c. \end{aligned}\right\} = 2cr^{n-1}$$

Comme on le deduit aiſément des prémieres Articles de ce Chapitre, & comme il eſt demontré dans tous les Livres de Trigonometrie. En general l'équation entre x corde du complement de l'arc ſimple A, &

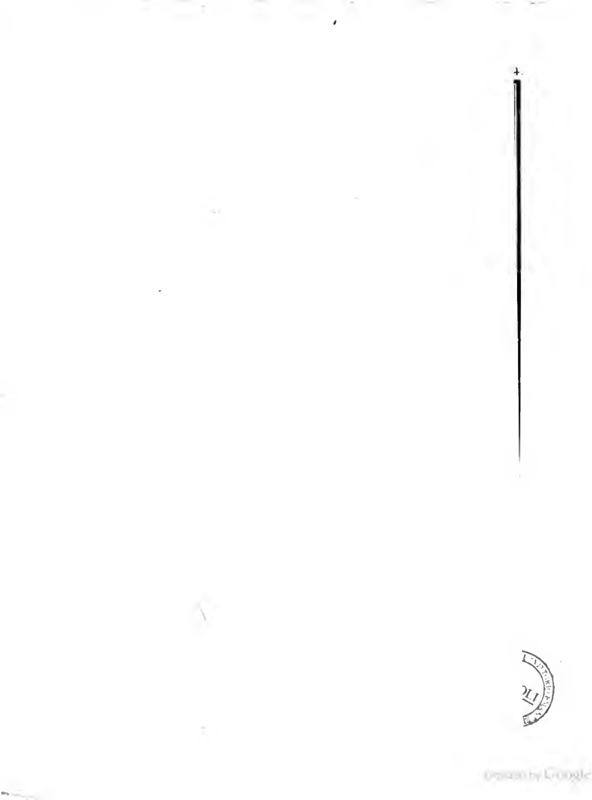
$2c$, celle du complement de l'arc multiple nA, sera $x^n - \frac{n}{1} r^2 x^{n-2} + \frac{n. n-3}{1. 2} r^4 x^{n-4} - \frac{n. n-4. n-5}{1. 2. 3} r^6 x^{n-6}$ &c. $= \pm 2c. r^{n-1}$.

Si on substitue dans les équations des arcs multiples l'expréssion $z + \frac{r^2}{z}$, à la place de x, on aura pour les doubles Cosiuus de $0A$, $1A$, $2A$, $3A$, &c. Ces autres valeurs $2r$, $z + \frac{r^2}{z}$, $z^2 + \frac{r^4}{z^2}$, $z^3 + \frac{r^6}{z^3}$ &c. Il est clair par la loi de cette progréssion que pour exprimér le rapport entre le double Cosinus du complement $z + \frac{r^2}{z}$ de l' arc A, & celui du complement d'un arc multiple nA, on aura $z^n + \frac{r^{2n}}{z^n} = \pm 2cr^{n-1}$, ou $z^{2n} \mp 2cr^{n-1} z^n + r^{2n} = 0$. Or on voit que cette équation est composée de facteurs ou racines, $z + \frac{r^2}{z} - x$, $z + \frac{r^2}{z} - x'$, $z + \frac{r^2}{z} - x''$ &c. au nombre de n, les valeurs x, x', x'' &c. dénotant les doubles Cosinus, ou les cordes de complement des arcs A, $A + \frac{2C}{n}$, $A + \frac{4C}{n}$, $A + \frac{6C}{n}$ &c. $2C$ désignant la circonférence du cercle, & A l'arc dont le multiple nA aura la corde du complement, ou le double Cosinus $= 2c$. Il est donc évident que l'équation préce-

dente eſt un produit de trinomes tels que $zz - xz + rr$, $zz - x'z + rr$ &c. au nombre de n maintenant ſoit fait (Fig. 9.) $SO = z$, $SA = r$, SP le Coſinus, ou la demicorde du complement de l'arc AB, ou $A = \frac{1}{2}x$, on aura $OB^2 = z^2 - xz + r^2$; dou il ſuit que l'équation $z^{2n} \mp 2cr^{n-1}z^n + r^{2n} = o$, eſt le produit de tous les quarrés comme OB^2. Ce qui donne le Théoreme de M.r Cotes. Car ſi on ſuppoſe dans l'équation précedente, $c = -r$, hypoteſe qui renferme que la demicirconférence eſt coupée en parties égales au nombre de n, & par conſequent la circonférence entiere au nombre de $2n$, les x, x', x'' &c. donneront les doubles Coſinus des arcs A, $3A$, $5A$, $7A$ &c. puiſque dans ce cas $\frac{C}{n} = A$. Donc les produits $z^2 - xz + rr$, $zz - x'z + rr$ &c. denotent les quarrés des droites impaires OB, OD, OF &c. Si on éxtrait la racine quarrée de $z^{2n} \mp 2cr^{n-1}z^n + r^{2n} = o$, on aura $z^n \mp r^n = OB \times OD \times OH \times OK$. De la même maniere faiſant dans l'équation $+c = +r$, ce qui emporte que la circonférence entiere $2c$ eſt coupée en parties égales au nombre de n, les x, x', x'' &c. deſigneront les doubles Coſinus des arcs $2A$, $4A$, $6A$, $8A$ &c. puiſque dans ce cas $A = o$, ou ſi l'on veut $= \frac{2c}{n}$; le Co-

ſinus de l'un & de l'autre étant $+r$. Donc les produits trinomes $zz+xz+rr$ &c. denotent les quarrés des droites paires OC, OE, OG &c., & en extraiant la racine quarrée, on aura $z^n+r^n = OC.\ OE.\ OA$, & multipliant enſemble les deux équations $(z^n + r^n)$ par $z^n - r^n$, on aura $z^{2n} - r^{2n} = OB.\ OC.\ OD \ldots\ldots OK.\ OA$ équation qui renferme le Théoréme que nous nous étions propoſé de demontrér.





CHAPITRE IV.

Du Calcul intégral des fractions rationelles.

CII.

Nous nous proposons dans ce chapitre d'intégrer absolument, ou par les Tables des Sinus & des Logarithmes la fraction $\frac{Pdx}{Q}$ reduite a ses moindres termes, dans la quelle P & Q sont des quantités composées, comme on voudra, de constantes & des puissances de x avec des exposans en nombres entiers. Nous ne parlerons point du cas ou le numerateur Pdx est en raison donnée a la différentielle dQ du denominateur: car nous avons demontré (Art. XL.) qu' alors l'intégrale de $\frac{Pdx}{Q}$, ou de $\frac{adQ}{Q}$ est egale au Logarithme hyperbolique de Q, multiplié par la constante a, ou que $S.\frac{Pdx}{Q} = aL.Q.$

CIII.

Il est evident dans notre supposition que P & Q peuvent toujours se reduire a des quantités de la forme

de $Ax^m + Bx^n + Cx^p +$ &c., & de $Ex^\lambda + Fx^\mu + Gx^\nu +$ &c. dans les quelles $A, B, C, E, F, G,$ &c. sont des constantes positives ou negatives, & les exposans $m, n, p, \lambda, \mu, \nu,$ &c. des nombres entiers positifs, ou zero, de sorte que la fraction rationelle Pdx pourra toujours etre exprimée par $\frac{Ax^m dx + Bx^n dx + Cx^p dx \text{ \&c.}}{Ex^\lambda + Fx^\mu + Gx^\nu + \text{\&c.}} =$

$$\frac{Ax^m dx}{Ex^\lambda + Fx^\mu + Gx^\nu + \text{\&c.}} + \frac{Bx^n dx}{Ex^\lambda + Fx^\mu + Gx^\nu + \text{\&c.}} +$$

$\frac{Cx^p dx}{Ex^\lambda + Fx^\mu + Gx^\nu + \text{\&c.}} +$ &c. Car s'il se trouvoit dans P ou Q une puissance de x, dont l'exposant fut un nombre entier negatif, comme x^{-q}, on le rendroit facilement positif, en multipliant P & Q par x^{+q}; ce qui ne changeroit point la valeur de la fraction $\frac{Pdx}{Q}$.

Par exemple, supposé que $\frac{Pdx}{Q} = \frac{Ax^m + Bx^{-n} + \text{\&c.}}{Ex^\lambda + Fx^{-\mu} + \text{\&c.}}$; en multipliant le numerateur & le denominateur par x^{+n} on auroit $\frac{Pdx}{Q} = \frac{Ax^{m+n} + B + \text{\&c.}}{Ex^{\lambda+n} + Fx^{n-\mu} + \text{\&c.}}$; & si apres cette multiplication l'exposant $n-\mu$ etoit encore negatif,

tif, on pourroit le rendre positif par une autre multiplication. Mais lors qu'il y a plusieurs exposans negatifs de x dans la fraction $\frac{P\,dx}{Q}$, on peut les rendre tous positifs par une seule multiplication; on n'a pour cela qu'a prendre le plus grand exposant negatif de x, que nous supposerons $= - r$, & multiplier P & Q par x^{+r}.

CIV.

On voit parce que nous venons de dire que pour intégrer la fraction $\frac{P\,dx}{Q}$, il suffit de trouver separement les intégrales des fractions $\frac{A x^m dx}{E x^\lambda + F x^\mu + G x^\nu + \&c.}$, $\frac{B x^n dx}{E x^\lambda + F x^\mu + G x^\nu + \&c.}$, &c. & d'en faire la somme; ainsi toute la difficulté se reduit a trouver l'intégrale de la fraction rationelle $\frac{a x^p dx}{E x^\lambda + F x^\mu + G x^\nu + \&c.}$, dans la quelle le numerateur n'a qu'un terme & tous les exposans p, λ, μ, ν, &c., sont des nombres entiers positifs, ou zero. On peut même, en supposant que λ est le plus grand exposant des puissances de x dans le denominateur, faire en sorte que cette plus haute puissance x^λ ne

ſoit multipliée que par $+ 1$; il n'ya pour ce la qu'a diviſer le numerateur & le denominateur de la fraction par le coefficient E, ce qui donnera $\frac{a x^p dx}{Q} =$

$$\frac{\frac{a}{E} x^p dx}{x^\lambda + \frac{F x^\mu}{E} + \frac{G x^\nu}{E} + \&c.}$$

Et comme la conſtante $\frac{a}{E}$ qui multiplie la différentielle, ne fait point de difficulté dans l'intégration, il ne s'agira plus que d'intégrer la fraction rationelle $\frac{x^p dx}{x^\lambda + f x^\mu + g x^\nu + \&c.}$, dans la quelle f, g, &c. ſont des conſtantes quelconques, & les expoſans p, λ, μ, ν, &c. des nombres entiers poſitifs, ou zero.

C V.

LORS que l'expoſant p, de x dans le numerateur $x^p dx$, n'eſt pas plus petit que l'expoſant λ de la plus-haute puiſſance de x dans le denominateur, il faut diviser le numerateur $x^p dx$ par le denominateur $x^\lambda + f x^\mu + \&c.$, & continuer la diviſion juſqu'a ce qu' on parvienne a un reſte, dans lequel l'expoſant de la plus haute puiſſance de x ſoit plus petit que λ. On partagera par cette diviſion la diférentielle $\frac{x^p dx}{x^\lambda + f x^\mu + \&c.}$

en deux parties, dont la premiere ſera le quotient $x^{p-\lambda}dx - fx^{\mu+p-2\lambda}dx + \&c.$, & la ſeconde ſera le reſte de la diviſion, dans lequel l'expoſant de la plus haute puiſſance de x au numerateur ſera plus petit que λ, & qui pourra ſe reduire a une, ou a pluſieurs fractions rationelles de la forme de $\frac{cx^{\lambda-q}dx}{x^{\lambda}+fx^{\mu}+gx^{\nu}+\&c.}$. Or on pourra toujours trouver l'intégrale $\frac{x^{p-\lambda+1}}{p-\lambda+1} - \frac{fx^{m+p-2\lambda+1}}{m+p-2\lambda+1}$ + &c. de la premiere partie ; & il ne reſtera plus qu'a chercher l'intégrale des fractions rationelles de la forme $\frac{cx^{\lambda-q}dx}{x^{\lambda}+fx^{\mu}+gx^{\nu}+\&c.}$, ou de $\frac{x^{\lambda-q}dx}{x^{\lambda}+fx^{\mu}+gx^{\nu}+\&c.}$, puiſque la conſtante c ne fait point de difficulté.

EXEMPLE. Pour trouver l'intégrale de la fraction rationelle $\frac{x^4dx}{x^2-4}$, on diviſera le numerateur par le denominateur ; & on aura $\frac{x^4dx}{x^2-4} = x^2dx + 4dx + \frac{16dx}{x^2-4}$; par conſequent $S.\frac{x^4dx}{xx-4} = \frac{x^3}{3} + 4x + 4.L.\left(\frac{x-2}{x+2}\right)$.

C V I.

Il n'eſt donc plus queſtion que de trouver l'intégrale de la différentielle $\frac{x^{\lambda-q}dx}{x^{\lambda}+fx^{\mu}+gx^{\nu}+\&c.}$, dans laquelle tous les expoſants λ, μ, ν, $\lambda-q$, &c. ſont des nombres entiers ou zero, & λ l'expoſant de la plus haute puiſſance de x dans le denominateur. Nous donnerons premierement les regles pour intégrer cette fraction, lors que ſon denominateur eſt une puiſſance rationelle d'un binome ou d'un trinome du premier & du ſecond degrés, comme $(a+bx)^n$, $(ax+bxx)^n$, $(a+bxx)^n$, $(a+bx+cxx)^n$, l'expoſant n etant un nombre entier poſitif ou zero, & a, b, c des conſtantes quelconques ou zero.

Nous ſuppoſerons en ſuite que le denominateur $x^{\lambda}+fx^{\mu}+g^{\nu}+\&c.$ étant le produit de pluſieurs puiſſances rationelles de binomes & trinomes du premier & du ſecond degrés, on connoiſſe tous ſes facteurs; nous partagerons la fraction $\frac{x^{\lambda-q}dx}{x^{\lambda}+fx^{\mu}+gx^{\nu}+\&c.}$ en pluſieurs autres fractions rationelles, dont chacune n'aura pour denominateur qu'un de ces facteurs; & nous trouverons les intégrales de ces fractions par les regles precedentes,

Enfin quelque ſoit le denominateur $x^{\lambda}+fx^{\mu}+gx^{\nu}+$&c. nous chercherons la maniere de le reſoudre en facteurs de l'eſpece que nous venons de dire; par ou nous aurons le moyen d'intégrer abſolument, ou par les tables des ſinus & des logarithmes la fraction rationelle proposée $\frac{P\,dx}{Q}$.

Nous diviſerons ce chapitre pour une plus grande clarté en trois articles.

ARTICLE PREMIER.

Trouvér l'intégrale d'une fraction différentielle, lorſque ſon denominateur eſt une puiſſance rationelle d'un binome ou d'un trinome du premier & du ſecond degrés, comme $(a+bx)^n$, $(ax+bxx)^n$, $(a+bxx)^n$, $(a+bx+cxx)^n$, l'expoſant n etant un nombre entier, poſitif, ou zero, & a, b, c des conſtantes quelconques ou zero.

CVII.

PROBLEME. I. Trouver l'intégrale de la fraction rationelle $\frac{x^m dx}{(a+bx)^n}$, a & b etant des conſtantes quelconques.

En ſuppoſant $a+bx=z$, on aura $x=\frac{z-a}{b}$, $dx=\frac{dz}{b}$, & $\frac{x^m dx}{(a+bx)^n}=\frac{(z-a)^m dz}{b^{m+1}z^n}$, dont on trouvera

l'intégrale absolument ou par les logarithmes, en developant la puissance $(z-a)^m$; comme nous l'avons deja demontré (Art. LXXVI.).

CVIII.

PROBLEME II. Trouver l'intégrale de la fraction rationelle $\frac{x^m dx}{x^p (a+bx)^n}$ l'exposant m etant plus petit que $p+n$, ou que l'exposant de la plus haute puissance de x dans le denominateur developpé.

Puis que $\frac{x^m dx}{x^p (a+bx)^n} = \frac{x^{m-p} dx}{(a+bx)^n}$, la fraction proposée s'intégre par le probleme precedent, lorsque l'exposant m, n'est pas plus petit que p; & si m est plus petit que p, en faisant $p-m=q$, on aura $\frac{x^m dx}{x^p (a+bx)^n}$ $= \frac{dx}{x^q (a+bx)^n}$. Or cette fraction se reduit a la forme de celle du probleme precedent, en faisant $x = \frac{1}{y} = y^{-1}$: Car on trouve par cette supposition, $dx = -y^{-2} dy$, $x^q = y^{-q}$, $a+bx = \frac{ay+b}{y}$, $(a+bx)^n = y^{-n}(ay+b)^n$; par consequent $\frac{dx}{x^q (a+bx)^n} = \frac{-y^{-2} dy}{y^{-q-n} (ay+b)^n} = \frac{-y^{q+n-2} dy}{(ay+b)^n}$ fraction de la même

forme que celle du probleme precedent, & qu'on pourra intégrer de la même maniere; puisque q & n etant des nombres entiers positifs, l'exposant $q+n-2$ sera aussi un nombre entier positif, ou zero. Donc &c.

CIX.

COROLLAIRE I. La fraction rationelle $\frac{x^m dx}{(ax+bxx)^n} = \frac{x^m dx}{x^n(a+bx)^n}$, est la même que $\frac{x^m dx}{x^p(a+bx)^n}$, en mettant n au lieu de p dans celle-ci; on l'intégre donc de la même maniere.

C X.

COROLLAIRE II. Puisque pour reduire la fraction $\frac{dx}{x^q(a+bx)^n}$ à la forme $\frac{-y^{q+n-2}dy}{(ay+b)^n}$, il faut supposér $x=\frac{1}{y}$, ou $y=x^{-1}$; & qu'en suite pour intégrer la fraction $\frac{-y^{q+n-2}dy}{(ay+b)^n}$ par le Probléme I.; il faut encore supposér $ay+b=z$, ou $y=\frac{z-b}{a}$; on abrégera le calcul en supposant d'abord $\frac{1}{x}=\frac{z-b}{a}$, ou $x=\frac{a}{z-b}=a(z-b)^{-1}$; d'ou l'on tirera $dx=-adz(z-b)^{-2}$, $x^q=a^q(z-b)^{-q}$, $a+bx=az(z-b)^{-1}$, $(a+bx)^n$

$= a^n z^n (z-b)^{-n}$; & enfin $\frac{dx}{x^q (a+bx)^n} = \frac{-dz\,(z-b)^{q+n-2}}{a^{q+n-1} z^n}$, qu'on intégrera par le Probléme 1.er en devélopant la puiſſance $(z-b)^{q+n-2}$.

C X I.

LEMME. La fraction rationelle $\frac{x^{2p}\,dx}{(xx+a)^{p+q}}$, dans la quelle p & q ſont des nombres entiers poſitifs quelconques & la conſtante a poſitive, ou negative, peut toujours ſe reduire à la ſuite finie des fractions rationelles $\frac{dx}{(x^2+a)^q} - \frac{p\,a\,dx}{(x^2+a)^{q+1}} + \frac{p.p-1}{1.2} \cdot \frac{a^2\,dx}{(x^2+a)^{q+2}} - \frac{p.p-1.p-2}{1.2.3} \cdot \frac{a^3\,dx}{(x^2+a)^{q+3}}$ + &c.

DEMONSTRATION. $\frac{x^2\,dx}{xx+a} = dx - \frac{a\,dx}{xx+a} = dx \left(1 - \frac{a}{xx+a}\right)$, par conſéquent $\frac{x^4\,dx}{(x^2+a)^2} = dx \times \frac{xx}{xx+a} \times \frac{xx}{x^2+a} = dx \left(1 - \frac{a}{xx+a}\right)^2$, $\frac{x^6\,dx}{(xx+a)^3} = dx \times \frac{xx}{xx+a} \times \frac{xx}{xx+a} \times \frac{xx}{xx+a} = dx \left(1 - \frac{a}{(xx+a)}\right)^3$, $\frac{x^8\,dx}{(xx+a)} = dx \left(1 - \frac{a}{xx+a}\right)^4$; &c. par où l'on voit évidemment qu'en faiſant pour abrégér, $xx + a = B$, on aura generalement $\frac{x^{2p}\,dx}{(xx+a)^p} = dx \left(1 - \frac{a}{B}\right)^p$. Or on trouve par le bi-

le binome de Newton $dx\left(1-\frac{a}{B}\right)^p = dx - \frac{padx}{B} + \frac{p.p-1}{1.\ 2.}.\frac{a^2dx}{B^2} - \frac{p.p-1\ p-2}{1.\ 2.\ \ 3}.\frac{a^3dx}{B^3} +$ &c. Donc $\frac{x^{2p}dx}{(xx+a)^{p+q}}$ $= \frac{x^{2p}dx}{(xx+a)^p \times (xx+a)^q} = \frac{x^{2p}dx}{B^p.B^q} = \frac{dx}{B^q} - \frac{padx}{B^{q+1}} + \frac{p.p-1}{1.\ 2}.$ $\frac{a^2dx}{B^{q+2}} - \frac{p.p-1.p-2}{1.\ 2.\ \ 3}.\frac{a^3dx}{B^{q+3}} +$ &c., suite qui finira, comme le binome de Newton, au terme dont le coefficient deviendra zero. *C. Q. F. D.*

CXII.

Corollaire. Lors qu'on aura trouvé l'intégrale de la fraction $\frac{dx}{(xx+a)^n}$ dans laquelle l'exposant n, est un nombre entier positif quelconque; on pourra aussi trouver l'intégrale de la fraction rationelle $\frac{x^{2p}dx}{(xx+a)^{p+q}}$, qui est égale à une suite finie de fractions, qui sont chacune de la forme de la fraction $\frac{dx}{(xx+a)^n}$, en substituant au lieu de n, les exposans q, $q+1$, $q+2$, $q+3$ &c., & en multipliant par une constante donnée.

CXIII.

Probleme III. Trouver l'intégrale de la fraction rationelle $\frac{x^m dx}{(a+bxx)^n}$, dans la quelle l'exposant m est

T

un nombre impair plus petit que $2n$, les constantes, a, & b ayant des signes quelconques.

Puisque m est un nombre impair, nous le pouvons supposer $= 2p+1$, p étant un nombre entier, ou zero, & la fraction $\frac{x^m dx}{(a+bxx)^n}$ sera $\frac{x^{2p+1} dx}{(a+bxx)^n} = \frac{x^{2p} \times x dx}{(a+bxx)^n}$. Or en faisant $a+bxx=z$, on aura $xx = \frac{z-a}{b}$, $x^{2p} = \frac{(z-a)^p}{b^p}$, $xdx = \frac{\frac{1}{2} dz}{b}$, & $\frac{x^{2p+1} dx}{(a+bxx)^n} = \frac{(z-a)^p \times \frac{1}{2} dz}{b^{p+1} z^n}$, différentielle qu'on pent toujours intégrer absolument ou par les logarithmes, comme dans le Probléme I.er *C. Q. F. D.*

EXEMPLE. Si l'on veut intégrer la fraction $\frac{x^3 dx}{(xx \pm 1)^2}$, on la comparera avec la formule generale $\frac{x^{2p+1} dx}{(bxx+a)^n}$; & on aura $2p+1=3$, $p=1$, $n=2$, $b=1$, $a=\pm 1$, $z=xx\pm 1$. Donc $\frac{x^3 dx}{xx \pm 1} = \frac{(z \mp 1) \times \frac{1}{2} dz}{z^2} = \frac{\frac{1}{2} z dz \mp \frac{1}{2} dz}{z^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{dz}{z} \mp \frac{1}{2} \cdot \frac{dz}{z^2}$, dont l' intégrale est $\frac{1}{2} \cdot L. z \pm \frac{1}{2z} = \frac{1}{2} L. (xx \pm 1) \pm \frac{1}{2(xx \pm 1)}$.

CXIV.

PROBLEME IV. Intégrer la fraction rationelle $\frac{x^{2p}dx}{(a+bxx)^n}$, p etant un nombre entier plus petit que n, ou zero, & les constantes a, b ayant des signes contraires.

Dans cette supposition, le denominateur sera $(a-bxx)^n$; ou $(bxx-a)^n$; or $a-bxx=-b(xx-\frac{a}{b})$; $bxx-a=+b(xx-\frac{a}{b})$; & en faisant $\frac{a}{b}=rr$, la fraction proposée sera $\pm\frac{x^{2p}dx}{b^n(xx-rr)^n}$. Il ne s'agit donc plus que d'intégrer la fraction $\pm\frac{x^{2p}dx}{b^n(xx-rr)^n}$, ou $\frac{x^{2p}dx}{(xx-rr)^n}$; car la constante $\pm\frac{1}{b^n}$ ne fait point de difficulté dans l'intégration. En mettant $p+q$ au lieu de n dans la derniere fraction, elle deviendra $\frac{x^{2p}dx}{(xx-rr)^{p+q}}$, & celle-ci se reduira a la suite finie $\frac{dx}{(xx-rr)^q}+\frac{pr^2dx}{(xx-rr)^{q+1}}+\frac{p.p-1}{1.\ 2.}\frac{r^4dx}{(xx-rr)^{q+2}}+\frac{p.p-1.p-2}{1.\ 2.\ 3.}\frac{r^6dx}{(xx-rr)^{q+3}}+$ &c.; en mettant $-rr$ au lieu de a dans la formule du Lemme (CXI.). Il n'est donc plus question que de l'intégration

de chaque terme de cette ſuite pour avoir celle de la fraction proposée. Or chacun de ces termes ſe reduit a la forme de $\frac{A\,dx}{(xx-rr)^{q+m}}$, q & m etant des nombres entiers poſitifs ou zero, & A une conſtante, il ne nous reſte donc qu'a chercher l' intégrale de $\frac{dx}{(xx-rr)^{q+m}}$.

Or $xx-rr=(x-r)\times(x+r)$, par conſequent $\frac{dx}{(xx-rr)^{q+m}}=\frac{dx}{(x-r)^{q+m}\times(x+r)^{q+m}}$; & en ſuppoſant $x-r=z$, on aura $dx=dz$, $x+r=z+2r$, la fraction $\frac{dx}{(x-r)^{q+m}\times(x+r)^{q+m}}=\frac{dz}{z^{q+m}(z+2r)^{q+m}}$, qu'on intégrera par le probleme 2. *C. Q. F. D.*

CXV.

COROLLAIRE. Si dans la fraction $\frac{dx}{(xx-rr)^{q+m}}$ on ſuppoſe dabord $x=r\left(\frac{u+1}{u-1}\right)$; en faiſant les ſubſtitutions neceſſaires, on trouvera $\frac{dx}{(xx-rr)^{q+m}}=-\frac{du(u-1)^{2q+2m-2}}{(2r)^{2q+2m-1}\times u^{q+m}}$; car puiſque $x=z+r$, & que pour reduire la fraction $\frac{dz}{z^{q+m}(z+2r)^{q+m}}$, a la forme du probleme 1.er il faut ſuppoſer $z=y^{-1}$, ou $y=z^{-1}$, d' ou

l' on tire $\frac{dz}{z^{q+m}(z+2r)^{q+m}} = \frac{-y^{2q+2m-2}dy}{(1+2ry)^{q+n}}$; & qu'apres il faut encore ſuppoſer $1+2ry=u$, d'ou l' on tire $y = \frac{u-1}{2r} = \frac{1}{z}$; on aura $z = \frac{2r}{u-1}$, & $z+r=x=\frac{2r}{u-1}+r=\frac{ru+r}{u-1}=r\left(\frac{u+1}{u-1}\right)$; & en ſubſtituant $\frac{u-1}{2r}$ au lieu de y dans la fraction $\frac{-dy.y^{2q+2m-2}}{(1+2ry)^{q+m}}$, elle devient $\frac{-du(u-1)^{2q+2m-2}}{(2r)^{2q+2m-1}\times u^{q+n}}$.

EXEMPLE. Pour trouver l' intégrale de la fraction $\frac{x^2dx}{(xx-1)^2}$, on la reduira d'abord par la formule du Lemme (ART. I.ER) a ces deux fractions $\frac{dx}{xx-1}+\frac{dx}{(xx-1)^2}$. l' intégrale de la premiere $S.\frac{dx}{xx-1}=\frac{1}{2}L.\frac{x-1}{x+1}=\frac{2}{4}L(x-1)-\frac{2}{4}L.(x+1)$. Pour trouver l' intégrale de la ſeconde fraction $\frac{dx}{(xx-1)^2}$, on la comparera avec la formule generale $\frac{dx}{(xx-rr)^{q+m}}$; & on aura $2=q+m$, $r=1$, & en faiſant $x=\frac{u+1}{u-1}$ ou $u=\frac{x+1}{x-1}$ on aura $\frac{dx}{(xx-1)^2}=\frac{-du(u-1)^{2q+2m-2}}{(2r)^{2q+2m-1}\times u^{q+m}}=\frac{-du(u-1)^2}{8u^2}$

$= \frac{-u^2du + 2udu - du}{8u^2} = \frac{-du}{8} + \frac{du}{4u} - \frac{du}{8u^2}$, dont l'intégrale eſt $- \frac{u}{8} + \frac{1}{4}.L.u + \frac{1}{8u}$. En mettant $\frac{x+1}{x-1}$ au lieu de u, on aura $S.\frac{dx}{(xx-1)^2} = \frac{1}{4}.L\left(\frac{x+1}{x-1}\right) + \frac{x-1}{8(x+1)} - \frac{(x+1)}{8(x-1)} = \frac{1}{4}L.(x+1) - \frac{1}{4}.L.(x-1) - \frac{x}{2(xx-1)}$.

Donc $S.\frac{x^2dx}{(xx-1)^2} = S.\frac{dx}{xx-1} + S.\frac{dx}{(xx-1)^2} = \frac{2}{4}L.(x-1) - \frac{2}{4}L.(x+1) + \frac{1}{4}L.(x+1) - \frac{1}{4}L.(x-1) - \frac{x}{2(xx-1)} = \frac{1}{4}L.(x-1) - \frac{1}{4}.L.(x+1) - \frac{x}{2(xx-1)} = \frac{1}{4}L.\left(\frac{x-1}{x+1}\right) - \frac{x}{2(xx-1)}$.

CXVI.

PROBLEME V. Trouver l'intégrale de la fraction rationelle $\frac{x^{2p}dx}{(a+bx^2)^n}$, p etant un nombre entier quelconque poſitif, ou zero, n un nombre quelconque entier poſitif plus grand que p; & les conſtantes a, b ayant les mêmes ſignes.

Puiſque $a+bx^2 = b\left(\frac{a}{b}+x^2\right) = b(xx+rr)$ en faiſant $\frac{a}{b}=rr$, on aura $(a+bxx)^n = b^n(x^2+rr)^n$,

& $\frac{x^{2p}dx}{(a+bx^2)^n} = \frac{x^{2p}dx}{b^n(xx+rr)^n} = \frac{x^{2p}dx}{b^n(xx+rr)^{p+q}}$ en faisant $p+q=n$. D'ou il fuit que pour intégrer la fraction propofée, il fuffit qu'on fache intégrer celle-ci $\frac{x^{2p}dx}{(xx+rr)^{p+q}}$. Or la fraction $\frac{x^{2p}dx}{(xx+rr)^{p+q}} = \frac{dx}{(xx+rr)^q} - \frac{pr^2dx}{(xx+rr)^{q+1}} +$ &c., en fubftituant $+rr$ au lieu de a, dans la formule generale du Lemme (Art. CXI.) Il ne nous refte donc qu'a trouver le moyen d' intégrer toutes les fractions de la forme $\frac{dx}{(xx+rr)^m}$, dans la quelle m eft un nombre entier pofitif quelconque. Et puis que s etant un arc de cercle au rayon r & dont la tangente eft x, on a $ds = \frac{rrdx}{xx+rr}$, comme nous l'avons demontré ailleurs; $\frac{ds}{rr} = \frac{dx}{xx+rr}$, & $\frac{s}{rr} = S. \frac{dx}{xx+rr}$. Il nous refte donc a intégrer la fraction $\frac{dx}{(xx+rr)^m}$; lors que m eft plus grand que l' unité.

$$S.\frac{dx}{(xx+rr)^m} = \frac{x}{2rr(m-1)(xx+rr)^{m-1}} + \frac{(2m-3)}{2rr(m-1)}$$

$S.\frac{dx}{(xx+rr)^{m-1}}$, puis qu' en prennant les différentielles de part & d' autre, on les trouve egales. On aura

donc l'intégrale $S. \frac{dx}{(xx+rr)^m}$, lors qu'on aura trouvé $S. \frac{dx}{(xx+rr)^{m-1}}$; de même on trouvera celle-ci lors qu'on connoitra $S. \frac{dx}{(xx+rr)^{m-2}}$; & ainsi de suite. Or comme m est un nombre entier positif plus grand que l'unité, en retranchant successivement les nombres 1, 2, 3, 4, 5, &c. de l'exposant m, on parviendra enfin à l'intégrale $S. \frac{dx}{(xx+rr)^1} = \frac{s}{rr}$, d'ou on remontra successivement aux intégrales superieurs $S. \frac{dx}{(xx+rr)^2}$ &c. & en fin on parviendra a l'intégrale proposée $S. \frac{dx}{(xx+rr)^m}$. On pourra donc toujours intégrer en partie absolument & en partie par la rectification du cercle, ou par les tables des tangentes, la différentielle $\frac{dx}{(xx+rr)^m}$; aprés quoi on aura de la même maniere l'intégrale de la fraction $\frac{x^{2p}dx}{(xx+rr)^{p+1}}$, & celle de la proposée $\frac{x^{2p}dx}{(a+bxx)^n}$. C. Q. F. D.

CXVII.

COROLLAIRE 1. En substituant $m-1$ au lieu de m, dans la formule $S. \frac{dx}{(xx+rr)^m} = \frac{x}{2rr(m-1)(xx+rr)^{m-1}}$

+

$+\frac{(2m-3)}{2rr(m-1)}.S\frac{dx}{(xx+rr)^{m-1}}$, on en deduit cette seconde formule $S.\frac{dx}{(xx+rr)^{m-1}}=\frac{x}{2rr(m-2)(xx+rr)^{m-2}}$ $+\frac{(2m-5)}{2rr(m-2)}.\ S.\frac{dx}{(xx+rr)^{m-2}}$. En substituant de même $m-1$ au lieu de m dans cette seconde formule, on aura cette 3eme formule $S.\frac{dx}{(xx+rr)^{m-2}}=$ $\frac{x}{2rr(m-3).(xx+rr)^{m-3}}+\frac{(2m-7)}{2rr(m-3)}.\ S.\frac{dx}{(xx+rr)^{m-3}}$; En continuant de même a substituer $m-1$ au lieu de m, dans la 3^e^ formule, on trouvera une quatrieme formule qui exprimera le valeur de $S.\frac{dx}{(xx+rr)^{m-3}}$; & en substituan $m-1$ au lieu de m dans la 4e formule on trouvera la cinquieme qui exprimera la valeur de $S.\frac{dx}{(xx+rr)^{m-4}}$, & ainsi de suite. On pourra continuer jusqu'a ce qu'on soit arrivé a la formule $S.\frac{dx}{xx+rr}=\frac{s}{rr}$. Mais on peut abreger ces formules, en exprimant $xx+rr$ par c; $m-1$, $m-2$, $m-3$, $m-4$ &c. par A, A', A'', A''' &c. respectivement, & $2m-3$, $2m-5$, $2m-7$, $2m-9$ &c. par B, B', B'', B''' &c.; & on aura la table suivante qu'on pourra continuer aisément autant qu'on voudra.

I.	$S.\frac{dx}{c^m} = \frac{x}{2rrAc^{m-1}} + \frac{B}{2rrA}\,S.\frac{dx}{c^{m-1}}.$
II.	$S.\frac{dx}{c^{m-1}} = \frac{x}{2rrA'c^{m-2}} + \frac{B'}{2rrA'}\,S.\frac{dx}{c^{m-2}}.$
III.	$S.\frac{dx}{c^{m-2}} = \frac{x}{2rrA''c^{m-3}} + \frac{B''}{2rrA''}\,S.\frac{dx}{c^{m-3}}.$
IV.	$S.\frac{dx}{c^{m-3}} = \frac{x}{2rrA'''c^{m-4}} + \frac{B'''}{2rrA'''}\,S.\frac{dx}{c^{m-4}}.$
V.	$S.\frac{dx}{c^{m-4}} = \frac{x}{2rrA''''c^{m-5}} + \frac{B''''}{2rrA''''}\,S.\frac{dx}{c^{m-5}}.$
	&c.
	$S.\frac{dx}{xx+rr} = \frac{s}{rr}.$

CXVIII.

Corollaire II. Puisque par la formule II. on a $S.\frac{dx}{c^{m-1}} = \frac{x}{2rrAc^{m-2}} + \frac{B'}{2rrA}.S\frac{dx}{c^{m-2}}$, on aura $\frac{B}{2rrA}$ $S\,\frac{dx}{c^{m-1}} = \frac{Bx}{4r^4AA'c^{m-2}} + \frac{B.B'}{4r^4AA''}\,S.\frac{dx}{c^{m-2}}$; & en substituant cette valeur dans la premiere formule $S.\frac{dx}{c^m} = \frac{x}{2rrAc^{m-1}} + \frac{B}{2rrA}\,S.\frac{dx}{c^{m-1}}$, on aura la formule suivante (K) $S.\frac{dx}{c^m} = \frac{x}{2rrAc^{m-1}} + \frac{Bx}{4r^4A.A'.c^{m-2}} +$

$\frac{B\,B'}{4r^4 A.A'} S \frac{dx}{c^{m-2}}$. Mais par la formule III. $S.\frac{dx}{c^{m-2}} = \frac{x}{2rrA'' c^{m-1}} + \frac{B''}{2rrA''} S.\frac{dx}{c^{m-1}}$, par confequent $\frac{B.B'}{4r^4 A.A'} S.\frac{dx}{c^{m-2}} = \frac{B.B'x}{8r^6 A.A'.A'' c^{m-1}} + \frac{B.B'.B''}{8r^6 A.A'A''} S.\frac{dx}{c^{m-1}}$; donc en fubftituant cette valeur dans la formule K, on aura (L)

$$S.\frac{dx}{c^m} = \frac{x}{2rrA\,c^{m-1}} + \frac{Bx}{4r^4 A.A' c^{m-2}} + \frac{B.B'x}{8r^6 A.A'.A'' c^{m-3}} + \frac{B.B'.B''}{8r^6 A.A'.A''} S.\frac{dx}{c^{m-3}}.$$

On trouvera de même par la formule IV. celle qui fuit (M) $S.\frac{dx}{c^m} = \frac{x}{2rrA\,c^{m-1}} + \frac{Bx}{4r^4 A.A' c^{m-2}} + \frac{B.B'.x}{8r^6 A.A'\,A'\,c^{m-3}} + \frac{B.B'.B''x}{16r^8 A.A'.A''.A''' c^{m-4}} + \frac{B.B'.B''.B'''}{16r^8 A.A'.A''.A'''} S.\frac{dx}{c^{m-4}}$. On voit facilement la maniere de trouver les autres formules, pour former la table fuivante, qu'on peut aifément continuer.

$$\text{I. } S.\frac{dx}{c^m} = \frac{x}{2rrAc^{m-1}} + \frac{B}{2rrA} S.\frac{dx}{c^{m-1}}.$$

$$\text{II. } S.\frac{dx}{c^m} = \frac{x}{2rrAc^{m-1}} + \frac{Bx}{4r^4 A.A'c^{m-2}} + \frac{B.B'}{4r^4 A.A'} S.\frac{dx}{c^{m-2}}.$$

$$\text{III. } S.\frac{dx}{c^m} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{x}{2rr.Ac^{m-1}} + \frac{Bx}{4r^4 A.A.c^{m-2}} + \frac{B.B'x}{8r^6 AA'A''c^{m-3}} \\ + \frac{B.B'.B''}{8r^6 A'.A.A''} S.\frac{dx}{c^{m-3}}. \end{array} \right.$$

$$\text{IV. } S.\frac{dx}{c^m} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{x}{2rr.Ac^{m-1}} + \frac{Bx}{4r^4 A.A'.c^{m-2}} + \frac{BB'x}{8r^6 A.A'A''c^{m-3}} \\ + \frac{B.B'.B''x}{16r^8 AA'A'A''c^{m-4}} + \frac{B'.B.B''B'''}{16r^8 AA'A''A'''} S.\frac{dx}{c^{m-4}}. \end{array} \right.$$

$$\text{V. } S.\frac{dx}{c^m} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{x}{2rr.Ac^{m-1}} + \frac{Bx}{4r^4 AA.c^{m-2}} + \frac{B.B'x}{8r^6 A.A'.A''c^{m-3}} \\ + \frac{B.B'B''x}{16r^8 A.A'A'A''c^{m-4}} + \frac{B.B'B''B'''x}{32r^{10} AA'A''A'''A''''c^{m-5}} \\ + \frac{B.B'B''B'''B''''}{32r^{10} AA'A'A'''A^{IV}} S.\frac{dx}{c^{m-5}}. \end{array} \right.$$

&c.

CXIX.

COROLLAIRE III. En ſubſtituant ſucceſſivement dans ces formules 1, 2, 3, 4, 5, &c. au lieu de m, on forme la Table ſuivante, qu'on pourra facilement continuer autant qu'on voudra.

$$m=1\text{, \& } S.\ \frac{dx}{xx+rr}=\frac{s}{rr}.$$

$$m=2\text{, \& } S.\ \frac{dx}{(xx+rr)^2}=\frac{x}{2rr(xx+rr)}+\frac{s}{2r^4}.$$

$$m=3\text{, \& } S.\ \frac{dx}{(xx+rr)^3}=\left\{\begin{array}{l}\frac{x}{4rr(xx+rr)^2}+\frac{3x}{8r^4(xx+rr)}\\ +\frac{3.s}{8r^6}.\end{array}\right.$$

$$m=4\text{, \& } S.\ \frac{dx}{(xx+rr)^4}=\left\{\begin{array}{l}\frac{x}{6rr(xx+rr)^3}+\frac{5x}{24r^4(xx+rr)^2}\\ +\frac{5x}{16r^6(xx+rr)}+\frac{5.s}{16r^8}.\end{array}\right.$$

$$m=5\text{, \& } S.\ \frac{dx}{(xx+rr)^5}=\left\{\begin{array}{l}\frac{x}{8rr(xx+rr)^4}+\frac{7x}{48r^4(xx+rr)^3}\\ +\frac{35x}{192r^6(xx+rr)^2}+\\ \frac{105x}{384r^8(xx+rr)}+\frac{105.s}{384r^{10}}.\end{array}\right.$$

$$m=6\text{, \& } S.\ \frac{dx}{(xx+rr)^6}=\left\{\begin{array}{l}\frac{x}{10rr(xx+rr)^5}+\frac{9x}{80r^4(xx+rr)^4}+\\ \frac{63x}{480r^6(xx+rr)^3}+\frac{315x}{1920r^8(xx+rr)^2}\\ +\frac{945x}{3840r^{10}(xx+rr)}+\frac{945.s}{3840.r^{12}}.\end{array}\right.$$

EXEMPLE. Pour intégrer la fraction $\frac{x^4 dx}{(xx+1)^3}$, on la comparera avec la formule generale $\frac{x^{2p} dx}{(xx+rr)^{p+q}}$, & on aura $2p=4$, $p=2$, $p+q=3$, $q=1$, $r=1$, $\frac{x^4 dx}{(xx+1)^3} = \frac{dx}{xx+1} - \frac{2dx}{(xx+1)^2} + \frac{dx}{(xx+1)^3}$. Or on trouve par les formules du Corollaire III.me $S.\frac{dx}{xx+1} =$ s arc de cercle dont le rayon 1, & la tangente x; $-2S.\frac{dx}{(xx+1)^2} = \frac{-2x}{2(xx+1)} - \frac{2s}{2} = \frac{-x}{xx+1} - s$; $S\frac{dx}{(xx+1)^3} = \frac{x}{4(xx+1)^2} + \frac{3x}{8(xx+1)} + \frac{3.s}{8}$. Donc $S\frac{x^4 dx}{(xx+1)^3} = s - \frac{x}{xx+1} - s + \frac{x}{4(xx+1)^2} + \frac{3x}{8(xx+1)} + \frac{3.s}{8} = \frac{8}{4(xx+1)^2} - \frac{5x}{8(xx+1)} + \frac{3.s}{8}$.

CXX.

PROBLEME VI. Trouver l'intégrale de la fraction rationelle $\frac{x^m dx}{(a+bx+cxx)^n}$, m & n étant des nombres positifs quelconques, & a, b, c des constantes positives ou négatives.

Puisque $a+bx+cx^2 = c\left(\frac{a}{c} + \frac{bx}{c} + x^2\right)$ en faisant $x + \frac{b}{2c}, = z$ on aura $xx + \frac{bx}{c} + \frac{bb}{4cc} = zz$,

$xx + \frac{bx}{c} = zz - \frac{bb}{4cc}$, $xx + \frac{bx}{c} + \frac{a}{c} = zz - \frac{bb}{4cc} + \frac{a}{c}$,

$a + bx + cx^2 = c\left(zz + \frac{a}{c} - \frac{bb}{4cc}\right)$, $(a + bx + cxx)^n$

$= c^n\left(zz + \frac{a}{c} - \frac{bb}{4cc}\right)^n$, $dx = dz$, & en fin

$$\frac{x^m dx}{(a + bx + cxx)^n} = \frac{(z - \frac{b}{2c})^m . dz}{c^n (zz + \frac{a}{c} - \frac{bb}{4cc})^n}.$$

Or en devélopant le numérateur $\left(z - \frac{b}{2c}\right)^m$, on reduit cette fraction a une suite finie d'autres fra-ctions rationélles, dont chacune a pour dénominateur $c^n\left(zz + \frac{a}{c} - \frac{bb}{4cc}\right)^n$, & qu'on pourra intégrer ſeparement par les Problémes précedens, ſelon que la quantité $\frac{a}{c} - \frac{bb}{4cc}$ ſera poſitive, ou négative. *C. Q. F. D.*

CXXI.

COROLLAIRE. Donc on pourra toujours intégrer abſolument ou par les Tables des Sinus & Logarithmes la fraction rationélle $\frac{x^m dx}{(a + bx + cxx)^n}$, les expoſans m, n étant des nombres entiers quelconques, & les conſtantes a, b, c des quantités quelconques, poſitives, ou négatives, ou zero; car les intégrales, que nous avons

trouvées dans les Problémes précedents font toutes des quantités algébriques finies, ou elles se trouvent par les Tables des Sinus, & Logarithmes.

ARTICLE SECOND.

Le dénominateur $x^\lambda + f x^\mu + g^\nu +$ &c. étant le produit de plusieurs puissances rationélles de binomes, & trinomes du prémier & du second degrè, dont on connoisse tous les facteurs, divisér la fraction $\frac{x^{\lambda - \pi} dx}{x^\lambda + f x^\mu + g x^\nu + \&c.}$ en plusieurs fractions rationélles, chacune des quelles n'aura pour dénominateur qu'un de ces facteurs, & trouver les intégrales de ces fractions par les regles de l'Article I.er

CXXII.

Préparation pour les Problémes suivans. Nous supposerons que dans la fraction rationélle $\frac{P dx}{Q}$, tous les exposans de x, & de ses fonctions sont des nombres entiers positifs, & que l'exposant de la plus haute puissance de x dans le dénominateur Q devéloppé étant λ; l'exposant de la plus haute puissance de x dans P n'est pas plus grand que $\lambda - 1$; autrement il faudroit divifer

divifer P par Q jufqu'à ce qu'on arrivât à une refte qui eût cette condition, comme nous l'avons expliqué ci-deffus (Art. CV.). Nous fuppoferons encore $P = H + Kx + Lx^2 + Mx^3 +$ &c...... $+ Tx^{\iota-1}$; H, K, L, M, T étant des quantités conftantes ou zero; & $Q = (a+bx) \times (c+ex)^m \times$ &c. $\times (f+gxx)^n \times (b+Kxx)^p \times (\vartheta + \mu x + \nu x^2)^q \times$ &c., c'eft à dire que le denominateur Q eft le produit de plufieurs binomes, ou trinomes du I.er, ou II.e degrès, ou de leurs puiffances rationélles; a, b, c, e, f, &c. étant des conftantes quelconques ou zero, & les expofans m, n, p, q, &c. des nombres entiers pofitifs, ou zero.

Pour rendre les calculs plus fimples, nous obferverons que $a + bx = b\left(\frac{a}{b} + x\right)$; $c + ex = e\left(\frac{c}{e} + x\right)$; $(c+ex)^m = e^m\left(\frac{c}{e} + x\right)^m$; $(f+gxx)^n = g^n\left(\frac{f}{g} + xx\right)^n$; & $(\vartheta + \mu x + \nu xx)^q = \nu^q\left(\frac{\vartheta}{\nu} + \frac{\mu x}{\nu} + xx\right)^q$; d'ou il fuit que le produit $(a+bx) \times (c+ex)^m \times (f+gxx)^n \times (b+Kxx)^p \times (\vartheta+\mu x+\nu xx)^q \times$ &c. $= (b e^m g^n K^p \nu^q$ &c.$)$ $\times \left(\frac{a}{b} + x\right) \times \left(\frac{c}{e} + x\right)^m \times \left(\frac{f}{g} + xx\right)^n \times \left(\frac{b}{K} + xx\right)^p \times \left(\frac{\vartheta}{\nu} + \frac{\mu x}{\nu} + xx\right)^q \times$ &c. donc fi on fait le pro-

duit constant $b e^m g^n K^p \nu^q = N$, & qu'on mette dans les binomes, & trinomes les lettres a, b, c, e, f, g, &c. au lieu des fractions $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{e}$, $\frac{f}{g}$, $\frac{h}{K}$, $\frac{\vartheta}{\nu}$, $\frac{\mu}{\nu}$ &c. on aura $Q = N \times (a + x) \times (b + x)^m \times (c + xx)^n \times (e + xx)^p \times (f + gx + xx)^q \times$ &c. & en supposant $V = (a + x) . (b + x)^m . (c + xx)^n . (e + xx)^p . (f + gx + xx)^q$ &c. on aura $Q = N . V$, & $\frac{P dx}{Q} = \frac{P dx}{N . V}$. Il suffira donc de chercher l'intégrale de la fraction $\frac{P dx}{V}$, qu'on divisera en suite par N pour avoir l'intégrale $S . \frac{P dx}{Q}$.

CXXIII.

PROBLEME I. Trouver l'intégrale de la fraction rationélle $\frac{P dx}{V} = \frac{(H + Kx + bx^2 + Mx^3 + \&c. \ldots + Tx^{\lambda - 1}) dx}{(a + x) . (b + x) . (c + x) . (e + x) . \&c.}$, dans laquelle le dénominateur V n'est composé que de facteurs binomes du prémier degrè, tous différens & prémiers entr'eux.

PREMIERE METHODE. 1.° Supposez $\frac{P}{V} = \frac{A}{a + x} + \frac{B}{b + x} + \frac{C}{c + x} + \frac{E}{e + x} +$ &c.; A, B, C, E &c. étant des numérateurs constans qu'il faut determiner.

2° Reduisez toutes ces fractions au même denominateur V, pour avoir $P = A.(b+x).(c+x).(e+x)$ &c. $+ B.(a+x).(c+x).(e+x)$.&c. $+ C.(a+x).(b+x).(e+x)$&c.$+ E.(a+x).(b+x).(c+x)$&c.

3° Ajoutéz ensemble tous ces produits developpés en prenant pour un seul terme la somme de ceux dans lesquels la lettre x a le même exposant, & egaléz ce terme a celui du numerateur P, ou x a le même exposant, ou faites le egal a zero, s' il ne se trouve aucun terme de même exposant dans P. Vous aurés par là autant d' equations simples qu' il y a de numerateurs indeterminés A, B, C, E, &c.

4° En comparant ces equations, vous determinerés les différentes valeurs de A, B, C, E &c. que vous substituerés dans les fractions separées $\frac{A}{a+x} + \frac{B}{b+x} + \frac{C}{c+x} + \frac{E}{e+x} +$ &c., & vous aurez l' intégrale $S. \frac{P dx}{V} = A.L.\overline{a+x} + B.L.\overline{b+x} + C.L.\overline{c+x} + E.L.\overline{e+x} +$ &c. C. Q. F. D.

EXEMPLE I. Soit $V = (a+x).(b+x)$, & $P = H + Kx$, H ou K pouvant etre zero. Car P ne peut etre $= H + Kx + Lx^2 +$ &c., puisque le plus grand exposant de x dans le denominateur V developpé, ou dans $ab + ax + bx + x^2$, etant 2, son plus grand ex-

posant dans P ne peut point surpasser l'unité. On aura donc $\frac{H+Kx}{(a+x).(b+x)} = \frac{A}{a+x} + \frac{B}{b+x} = \frac{A(b+x)+B(a+x)}{(a+x).(b+x)}$; par conséquent $P = H + Kx = Ab + Ba + (A+B)x$; d'ou l'on tire les deux equations $Ab+Ba=H$, & $(A+B)x = Kx$, ou $A+B=K$; & par les regles ordinaires $A = \frac{H-Ka}{b-a}$, & $B = \frac{H-Kb}{a-b}$. En substituant ces valeurs de A & de B dans la quantité $A.L.\overline{a+x} + B.L.\overline{b+x}$ on aura $\frac{H-Ka}{b-a}, L.\overline{a+x} + \frac{H-Kb}{a-b}.L.\overline{b+x}$ pour l'intégrale de la différentielle proposée $\frac{Hdx+Kxdx}{(a+x).(b+x)}$.

EXEMPLE 2. Soit $V=(a+x).(b+x).(c+x)$, & $P = H+Kx+Lx^2 = A.(b+x).(c+x) + B.(a+x).(c+x) + C(a+x).(b+x) =$.

$$\begin{array}{lll} +Axx & +Abx & +Abc \\ & +Acx & \\ +Bxx & +Bax & +Bac \\ & +Bcx & \\ +Cxx & +Cax & +Cab \\ & +Cbx & \end{array}$$

On aura donc ces trois equations $Abc+Bca+Cab=H$; $Ab+Ac+Ba+Bc+Ca+Cb=K$; & $A+B+C=L$. Pour trouver plus facilement les va-

leurs de A, B, C multipliez tous les termes de la seconde equation par l'indeterminée m, & tous les termes de la 3e equation par l'indeterminée n; & ecrivez les negativement sous la I^e equation en cette sorte

$$\begin{array}{l} Abc + Bac + Cab = H \\ \left.\begin{array}{l} -Abm - Bam - Cam \\ -Acm - Bcm - Cbm \end{array}\right\} = -Km \\ -An \quad - Bn \quad - Cn = -Ln \end{array}$$

En suite pour trouver la valeur de A, faites $Bac - Bam - Bcm - Bn = o$, & $Cab - Cam - Cbm - Cn = o$, par consequent $Abc - Abm - Acm - An = H - Km - Ln$. Vous aurés par la I^e equation $ac - am - cm = n$, & par la IIe $ab - am - bm = n$; donc $ac - cm = ab - bm$, $ac - ab = cm - bm$, & en divisant par $c - b$, $m = a$; & $n = ab - aa - ba = -aa$. Substituant ces valeurs de m & de n dans l'equation $Abc - Abm - Acm - An = H - Km - Ln$, on trouve $Abc - Aba - Aca + Aaa = H - Ka + Laa$, & $A = \frac{H - Ka + Laa}{(b-a).(c-a)}$.

Pour trouver la valeur de B faites $Abc - Abm - Acm - An = o$, $Cab - Cam - Cbm - Cn = o$, & $Bac - Bam - Bcm - Bn = H - Km - Ln$; vous trouverés $m = b$, $n = -bb$, & $B = \frac{H - Kb + Lbb}{(a-b).(c-b)}$. Enfin pour trouver la valeur de C, on supposera $Abc - Abm -$

$Acm - An = o$, $Bac - Bam - Bcm - Bn = o$, & $Cab - Cam - Cbm - Cn = H - Km - Ln$; cequi donnera $m = c$, $n = -cc$, & $C = \frac{H - Kc + Lcc}{(a-c).(b-c)}$.

En substituant ces valeurs de A, B, C dans la quantité $A.L.\overline{a+x} + B.L.\overline{b+x} + C.L.\overline{c+x}$, on aura l'intégrale de la différentielle proposée $\frac{(H + Kx + Lxx)dx}{(a+x).(b+x).(c+x)}$, H, K, L etant des constantes quelconques ou zero.

SECONDE METHODE. Supposant toujours $P = H + Kx + Lx^2 + Mx^3 + \&c. \ldots + Tx^{\lambda-1}$; $V = (a+x).(b+x).(c+x)(e+x)\&c.$, $\frac{P}{V} = \frac{A}{a+x} + \frac{B}{b+x} + \frac{C}{c+x} + \frac{E}{e+x} + \&c.$, par consequent $P = A(b+x).(c+x).(e+x)\&c. + B(a+x).(c+x).(e+x).\&c. + C(a+x).(b+x).(e+x)\&c. + E(a+x).(b+x).(c+x)\&c.$, pour determinér la valeur de A dans la fraction $\frac{A}{a+x}$, nous ferons $\frac{V}{a+x} = R = (b+x).(c+x).(e+x).\&c.$, & $S = B(c+x).(e+x)\&c. + C(b+x).(e+x)\&c. + E(b+x).(c+x)\&c.$, d'ou l'on tire $R(a+x) = V$, $\frac{S}{R} = \frac{B}{b+x} + \frac{C}{c+x} + \frac{E}{e+x} + \&c.$, & $\frac{P}{V} = \frac{A}{a+x} + \frac{S}{R}$, ou $\frac{S}{R} = \frac{P}{V} - \frac{A}{a+x}$, &

$S = \frac{PR}{V} - \frac{AR}{a+x} = \frac{P-AR}{a+x}$, a cause de $V = R(a + x)$. Donc la quantité $P - AR$ est exactement divisible par $x + a$, puisque le quotient de cette division est $S = B(c+x).(e+x)$ &c. $+ C(b+x).(e+x)$ &c. $+$ &c.; par consequent si l'on considere la quantité $P - AR$ comme une equation dont l' inconue est x, en faisant $P - AR = o$, $x + a = o$ sera une des racines de cette equation, & en substituant $- a$ au lieu de x dans la quantité $P - AR$, elle s' avanouïra, & on aura $AR = P$, ou $A = \frac{P}{R}$. Donc pour trouver la valeur du numerateur A de la fraction $\frac{A}{a+x}$, on n'a qu'a prendre $R = \frac{V}{a+x}$, & substituer $- a$ aulieu de x dans le numerateur P & le denominateur R de la fraction $\frac{P}{R}$, & on aura alors $A = \frac{P}{R}$. On operera de la même maniere pour trouvér le numerateur B de la fraction $\frac{B}{b+x}$, en prennant $R = \frac{V}{b+x}$ & en substituant $- b$ au lieu de x dans la fraction $\frac{P}{R}$ qui par là devindra egale a B; on trouvera de même la valeur de C, en suite celle de E &c., comme on le voit dans la table suivante.

$$A = \frac{H - Ka + La^2 - Ma^3 + \&c. \ldots \pm Ta^{\lambda-1}}{(b-a).(c-a).(e-a)\&c.}$$

$$B = \frac{H - Kb + Lb^2 - Mb^3 + \&c. \ldots \pm Tb^{\lambda-1}}{(a-b).(c-b).(e-b)\&c.}$$

$$C = \frac{H - Kc + Lcc - Mc^3 + \&c. \ldots \pm Tc^{\lambda-1}}{(a-c).(b-c).(e-c)\&c.}$$

$$E = \frac{H - Ke + Lee - Me^3 + \&c. \ldots \pm Te^{\lambda-1}}{(a-e).(b-e).(c-e)\&c.}$$

Le dernier terme $Tx^{\lambda-1}$ a le ſigne $+$ lorſque λ eſt un nombre impair; & le ſigne $-$ lorſque λ eſt un nombre pair.

TROSIEME METHODE. Puiſque la valeur de A dans la fraction $\frac{A}{a+x}$ eſt troujours $\frac{P}{R}$, en ſuppoſant $R = \frac{V}{a+x}$ & en ſubſtituant $-a$ au lieu de x dans P & dans R, ou en faiſant $x + a = o$; on aura auſſi $A = \frac{P(a+x)}{R(a+x)} = \frac{P(a+x)}{V}$, & $AV = P(a+x)$, dans les mêmes ſuppoſitions. Donc en prenant les différentielles de part & d' autre, on aura $AdV = (a+x).dP + Pdx = Pdx$ a cauſe de la ſuppoſition de $x + a = o$. Or puis que $V = (a+x).(b+x).(c+x).(e+x)$ &c., on aura $dV = dx\,(b+x).(c+x).(e+x)$ &c. $+ dx(a+x).(c+x).(e+x)$.&c. $+ dx(a+x).(b+x).(e+x)$ &c.

&c. $+dx(a+x).(b+x).(c+x)$ &c. $=dx(b+x).(c+x).(e+x)$ &c., car $a+x$ etant $=o$, tous les termes $dx(a+x).(c+x).(e+x)$ &c., $dx(a+x).(b+x).(e+x)$ &c., ou le facteur $a+x$ se trouve, s'evanouïssent, & il ne reste que la différentielle $dx(b+x).(c+x).(e+x)$ &c. $=dV$. On aura donc $A=\frac{Pdx}{dV}=\frac{P}{(b+x).(c+x).(e+x)\text{\&c.}}$ aprés avoir substitué $-a$ au lieu de x dans le numerateur P & dans le denominateur $(b+x).(c+x).(e+x)$ &c., ce qui donne $A=\frac{H-Ka+La^2-Ma^3+\text{\&c.}\ldots\ldots\pm Ta^{\lambda-1}}{(b-a).(c-a).(e-a)\text{\&c.}}$ comme on l'a deja trouvé par la seconde methode.

EXEMPLE I. On veut trouver l'intégrale de la fraction $\frac{3dx-4x^2dx}{(1-x).(-1+x).(2+x).(3+x)}$. En comparant le numerateur $(3-4x^2)dx$ avec le numerateur $(H+Kx+Lx^2+Mx^3+\text{\&c.}\ldots\ldots+Tx^{\lambda-1})dx$ de la formule generale, on trouve $H=3, K=o, L=-4, M=o, T=o$; & en comparant le denominateur $(1+x).(-1+x).(2+x).(3+x)$ avec le denominateur $(a+x).(b+x).(c+x).(e+x)$ de la formule generale, on trouve $a=1, b=-1, c=2, e=3$. Substituant toutes ces valeurs dans les formules trouvées par la seconde methode, on trouve $A=\frac{H+La^2}{(b-a).(c-a).(e-a)}$

$= \frac{3-4}{-2 \times 1 \times 2} = \frac{1}{4}; B = \frac{H + Lb^2}{(a-b).(c-b).(e-b)} = \frac{3-4}{2 \times 3 \times 4}$ $= -\frac{1}{24}; C = \frac{H + Lc^2}{(a-c).(b-c).(e-c)} = -\frac{13}{3}$, & $E = \frac{H + Le^2}{(a-e).(b-e).(c-e)} = \frac{33}{8}$. Donc l' intégrale de la fraction proposée $= A. L. \overline{a+x} + B. L. \overline{b+x} + C. L \overline{c+x} + E. L. \overline{e+x} = \frac{1}{4}. L. \overline{1+x} - \frac{1}{24}. L. \overline{x-1} - \frac{13}{3}. L. \overline{2+x} + \frac{33}{8}. L. \overline{3+x}$.

EXEMPLE 2. Pour intégrer la fraction rationelle $\frac{4xdx + 5x^2dx}{(1-x).(6+3x).(10-5x)}$, il faudra reduire son denominateur a la forme du denominateur $(a+x).(b+x).(c+x)$ de la formule generale $\frac{(H + Kx + Lx^2)dx}{(a+x).(b+x).(c+x)}$; ce qui est facile, puisque $1-x = -1 \times (-1+x)$, $6+3x = 3.(2+x)$, $10-5x = -5.(-2+x)$; & $(1-x).(6+3x).(10-5x) = 15.(-1+x).(2+x).(-2+x)$, qui a la forme requise. On aura donc $\frac{4xdx + 5x^2dx}{(1-x).(6+3x).(10-,x)} = \frac{(4x + 5x^2)dx}{15.(-1+x).(2+x).(-2+x)}$, & on cherchera l'intégrale de la fraction $\frac{(4x + 5x^2)dx}{(-1+x).(2+x).(-2+x)}$, qu'on divisera en suite par 15. On trouve $H = 0, K = 4, L = 5$; $a = -1, b = 2$,

$c = -2$; d'ou l'on tire $A = \frac{H - Ka + La^2}{(b-a).(c-a)} = \frac{0+4+5}{3 \times -1}$ $= -3, B = \frac{-Kb + Lb^2}{(a-b).(c-b)} = \frac{-8+20}{-3 \times -4} = \frac{-12}{+12} = -1,$ $C = \frac{-Kc + Lc^2}{(a-c).(b-c)} = \frac{+8+20}{1 \times 4} = \frac{28}{4} = 7; A.L.\overline{a+x} + B$ $L.\overline{b+x} + C.L\overline{c+x} = -3.L.\overline{x-1} - L\overline{x+2} + 7.$ $L\,\overline{x-2}$. Donc en diviſant par 15, l'intégrale de la fraction propoſée ſera $-\frac{1}{5}L.\overline{x-1} - \frac{1}{15}.L\overline{x+2} + \frac{7}{15}$ $L.\overline{x-2}$.

CXXIV.

COROLLAIRE I. La fraction rationelle $\frac{Pdx}{V}$ pourra toûjours s'intégrer par les formules precedentes, lorſque ſon denominateur V n'aura pour facteurs que des binomes ſimples premiers entr'eux, ou des binomes & trinomes du ſecond'degré auſſi premiers entr'eux & reductibles aux binomes ſimples; tels que ſont tous les binomes qui ont la forme de $xx - b, + b$ etant une quantité réelle & poſitive, & tous les trinomes qui ont la forme de $xx + fx - g$, ou la forme de $xx + fx + g$ pourvu que $\frac{1}{4}ff$ ſoit plus grand que g; f etant dans ces deux trinomes une quantité poſitive ou negative, f & g

des quantités réelles. Car le binome $xx - b = (x + \sqrt{b}) \times (x - \sqrt{b})$; le trinome $xx + fx - g = \left(x + \frac{1}{2}f + \sqrt{\frac{1}{4}ff + g}\right) \times \left(x + \frac{1}{2}f - \sqrt{\frac{1}{4}ff + g}\right)$; le trinome $xx + fx + g = \left(x + \frac{1}{2}f + \sqrt{\frac{1}{4}ff - g}\right) \times \left(x + \frac{1}{2}f - \sqrt{\frac{1}{4}ff - g}\right)$; & $\sqrt{\frac{1}{4}ff + g}$ eſt toujours une quantité réelle lorſque g eſt poſitive; mais $\sqrt{\frac{1}{4}ff - g}$ n'eſt une quantité réelle que dans le Cas de $\frac{1}{4}ff > g$, autrement elle eſt imaginaire. Donc ſi dans la fraction rationelle $\frac{Pdx}{V}$ le denominateur $V = (a + x).(b + x)$ &c. $(-b + xx).(-K + xx)$ &c. $(-g + fx + xx).(-L + mx + xx)$ &c. $(P + nx + xx)$, $\frac{1}{4}nn$ etant plus grand que P dans le dernier trinome; On pourra toujours intégrer cette fraction par les formules precedentes, en faiſant les ſubſtitutions des produits des binomes ſimples au lieu des binomes & trinomes du 2e degré; pourvu qu'apres ces ſubſtitutions, tous les binomes ſimples & réels, dont le denominateur V ſera composé, ſoient tous différens & premiers entréux. Par exemple ſi le denominateur V etoit $(2 + x)(-1 + xx).(-6 + x + xx)$, on le reduiroit a la forme requiſe en

fubftituant $(1+x)(-1+x)$ au lieu de $-1+xx$, & $(3+x).(-2+x)$ au lieu de $(-6+x+xx)$; & on auroit $V=(2+x).(1+x).(-1+x).(3+x).(-2+x)$, quantité composée de binomes fimples, réels, & tous premiers entr'eux.

CXXV.

COROLLAIRE II. Lorfque dans la fraction rationelle $\frac{Pdx}{V}$ on a fuppofé $\frac{P}{V}=\frac{A}{a+x}+\frac{B}{b+x}+\frac{C}{c+x}+$ &c. $+\frac{S'}{Q'}$, Q' etant composé de facteurs, qui font des binomes ou trinomes irreductibles du 2e degré, ou des puiffances rationelles de différentes fortes de binomes ou trinomes du 1er ou du 2e degrez; & S' pouvant etre exprimée par la fuite $H'+K'x+L'x^2+M'x^3+$&c. dans laquelle l'expofant de la plus haute puiffance de x, eft moindre que celui de la plus haute puiffance dans le denominateur Q'; on pourra toujours detérminer par la feconde ou par la troifieme methode les valeurs des conftantes indeterminées A, B, C, &c. ou les numerateurs des fractions dont les denominateurs $a+x, b+x, c+x$, &c. font des binomes fimples & premiers entr'eux. Car on trouve par la feconde methode $A=\frac{P}{R}$, en faifant $R=\frac{V}{a+x}$, & en fubftituant $-a$ au lieu de x dans

P & dans R; & $B=\frac{P}{R}$, en faiſant $R=\frac{V}{b+x}$ & en ſubſtituant $-b$ au lieu de x dans P & dans R; &c.

Soit par exemple $V=(a+x).(b+x).(c+xx)$, & $\frac{P}{V}=\frac{H+Kx}{V}=\frac{A}{a+x}+\frac{B}{b+x}+\frac{S'}{c+xx}$; on trouvera par la ſeconde méthode $A=\frac{P}{R}=\frac{H+Kx}{(b+x).(c+xx)}=\frac{H-Ka}{(b-a).(c+aa)}$; $B=\frac{H-Kb}{(a-b).(c+bb)}$; par conſéquent $\frac{H+Kx}{V}=\frac{H-Ka}{(b-a).(c+aa)(a+x)}+\frac{H-Kb}{(a-b).(c+bb).(b+x)}+\frac{S'}{c+xx}$,

& $S'=\frac{H+Kx-A(b+x)(c+xx)-B(a+x)(c+xx)}{(a+x)(b+x)}$;

lors qu'on aura ſubſtitué les valeurs trouvées de A, & de B dans le numérateur de cette fraction, il ſera éxactement diviſible par ſon dénominateur $(a+x)(b+x)$, & le quotient ſera la valeur de S' ſans fractions, ce qui doit toujours arriver, puis qu'on ſuppoſe dans tous les cas, que la fraction rationélle $\frac{P}{V}$ doit être partagée en d'autres fractions, dont les numérateurs ſoient ſans fractions, & par conſéquent de la forme $H', +K'x+L'x^2+M'x^3+$ &c., dans la quelle H', K', L', M', &c. ſont des quantités conſtantes, ou zero.

CXXVI.

COROLLAIRE III. Dans la ſuppoſition du Corollaire précedent on a l'intégrale $S.\frac{Pdx}{V} = A.L.\overline{a+x} + B.L.\overline{b+x} + C.L.\overline{c+x} +$ &c. $+ S.\frac{S'dx}{Q'}$. Lors donc qu'on aura déterminé les valeurs de A, B, C, &c. par le même Corollaire, il ne reſtera plus qu'à trouver l'intégrale de la fraction rationélle $\frac{S'dx}{Q'}$, S' étant $= H' + K'x + L'x^2 + M'x^3 +$ &c. & Q' étant $= \frac{V}{(a+x).(b+x).(c+x)\ \&c.}$. Ainſi lorſque le dénominateur V de la fraction $\frac{Pdx}{V}$ eſt compoſé en partie de binomes ſimples et prémiers entr'eux, & en partie d'autres binomes, ou trinomes irreductibles du 2e. degré, ou des puiſſances des binomes ſimples, ou des binomes & trinomes du 2e. degré, les binomes ſimples ne feront plus de difficulté.

REMARQUE. On peut appliquer les méthodes du Probléme prémier à la fraction $\frac{P}{V}$, lors même que ſon dénominateur V a pour facteurs des binomes ou trinomes irreductibles du ſecond degré. Il n'y a pour cela qu'à decompoſer ces binomes, ou trinomes dans

leurs facteurs imaginaires, & trouvér en suite par les formules du Probléme les indéterminées, qui doivent servir de numérateurs aux fractions partielles, & enfin prendre la somme de ces fractions. Si l'on a, par exemple, $\frac{P}{V} = \frac{1}{(x+a)(xx+c)}$, on supposera $\frac{1}{(x+a)(xx+c)}$ $= \frac{A}{x+a} + \frac{B}{x+\sqrt{-c}} + \frac{C}{x-\sqrt{-c}} = \frac{A}{x+a} + \frac{B}{x+m} + \frac{C}{x-m}$, en faisant $m = \sqrt{-c}$, & $-m = -\sqrt{-c}$. on trouvera en suite par l'une des méthodes du prémier Probléme les valeurs des indéterminées A, B, C; celles de B, & C contiendront des imaginaires; Mais si l'on prend la somme des fractions $\frac{B}{x+\sqrt{-c}}$, $\frac{C}{x-\sqrt{-c}}$, toutes les imaginaires disparoitront, & l'on aura une fraction de la forme $\frac{F+Gx}{xx+c}$, F, & G étant des constantes. Nous ne nous étendrons pas davantage sur cette méthode, qui est souvent fort embarassante dans la pratique.

CXXVII.

PROBLEME II. Trouver l'intégrale de la fraction rationélle $\frac{Pdx}{V}$, le dénominateur V étant composé de binomes & trinomes irreductibles du second degré, ou étant $=(a+xx).(b+xx).$ &c. $\times$ $(c+ex+xx).(f+gx+xx)$ &c.

PRE.

PREMIERE METHODE 1° suppofez $\frac{P}{V} = \frac{A+Bx}{a+xx} + \frac{C+Ex}{b+xx} +$ &c. $\frac{+F+Gx}{c+ex+xx} + \frac{F'+G'x}{f+gx+xx} +$ &c.; A, B, C, E, F, G, &c. étant des conftantes qu'il faut determiner. 2° Reduifez toutes ces fractions au même denominateur V pour avoir $P = (A+Bx).(b+xx).(c+ex+xx).(f+gx+xx)$ &c. $+ (C+Ex).(a+xx).(c+cx+xx).(f+gx+xx)$ &c. $+ (F+Gx).(a+xx).(b+xx).(f+gx+xx) + (F'+G'x).(a+xx).(b+xx).(c+ex+xx)$ &c.

3° Developpez tous ces produits & faites en la fomme en prenant pour un feul terme tous ceux dans lefquels l'expofant de x eft le même, & egalez ce terme a celui du numerateur P ou x a le même expofant, ou faites le egal a zero, s'il ne fe trouve aucun terme correfpondant dans P. Vous aures par la autant d'equations fimples qu'il y a de conftantes A, B, C, E, F, G, &c. a determiner par la comparaifon de ces equations, comme dans la premiere methode du probleme I. qui eft la même que celle-ci.

EXEMPLE foit $V = (a+xx).(b+cx+xx)$, $P = H+Kx+Lx^2+Mx^3$, & $\frac{P}{V} = \frac{A+Bx}{a+xx} + \frac{C+Ex}{b+cx+xx}$; par confequent $P = (A+Bx).(b+cx+xx) + (C+Ex).(a+xx) =$ ———

$$\begin{array}{l} Ab + Acx + Axx \\ \quad + Bbx + Bcxx + Bx^3 \\ + Ca \qquad\quad + Cxx \\ \quad + Eax \qquad\qquad + Ex^3 . \end{array}$$

On aura donc ces 4. equations $Ab + Ca = H$, $Ac + Bb + Ea = K$, $A + Bc + C = L$, $B + E = M$; par lesquelles on trouvera

$$A = \frac{H(b-a) + Kac - La(b-a) - Maac}{acc + (b-a)^2};$$

$$B = \frac{-Hc + K(b-a) + Lac - Ma(b-a)}{acc + (b-a)^2};$$

$$C = \frac{H(cc + a - b) - Kcb - (+ Lb(b-a) + Mabc}{acc + (b-a)^2},$$

$$E = \frac{Hc - K(b-a) - Lac + M(acc + bb - ba)}{acc + (b-a)^2}.$$

4.° Apres avoir determiné les valeurs des constantes, A, B, C, E, F, G, &c., on les substituera dans les fractions separées $\frac{A + Bx}{a + xx}$, $\frac{C + Ex}{b + xx}$, $\frac{F + Gx}{c + ex + xx}$, &c.; & comme $\frac{Pdx}{V} = \frac{Adx + Bxdx}{a + xx} + \frac{Cdx + Exdx}{b + xx} + \frac{Fdx + Gxdx}{c + cx + xx} +$ &c. $= \frac{Adx}{a + xx} + \frac{Bxdx}{a + xx} + \frac{Cdx}{b + xx} + \frac{Exdx}{b + xx} + \frac{Fdx}{c + ex + xx} + \frac{Gxdx}{c + ex + xx} +$ &c.. On aura l'intégrale cherchée $S. \frac{Pdx}{V}$, en prenant la somme des intégrales de chacune des fractions separées, qu'on trouvera en partie par les logarithmes, & en partie par la quadrature du cercle ou par les tables des sinus, comme nous l'avons demontré précedemment.

Dans l'exemple proposé on aura $\frac{Pdx}{V} = \frac{Adx}{a+xx} + \frac{Bxdx}{a+xx} + \frac{Cdx}{b+cx+xx} + \frac{Exdx}{b+cx+xx}$; Or on ſçait que l'intégrale de la fraction $\frac{Adx}{a+xx}$ eſt $\frac{AS}{a}$, S etant un arc de cercle dont la tangente eſt x & le rayon $\sqrt{a}$; l'intégrale de la fraction $\frac{Bxdx}{a+xx}$ eſt $\frac{1}{2}B.L.\overline{a+xx}$; & ainſi des autres.

SECONDE METHODE pour determiner les A, B, C, E, F, G &c. Suppoſons toujours $P = H + Kx + Lx^2 + Mx^3 +$ &c., $V = (a+xx)(b+xx)$ &c. $\times (c+ex+xx)(f+gx+xx)$ &c., & $\frac{P}{V} = \frac{A+Bx}{a+xx} + \frac{C+Ex}{b+xx} + \frac{F+Gx}{c+ex+xx} + \frac{F'+G'x}{f+gx+xx} +$ &c. Si l'on veut determiner les conſtantes A & B dans le numerateur de la fraction $\frac{A+Bx}{a+xx}$, on ſuppoſera $R = \frac{V}{a+xx} = (b+xx).(c+ex+xx).(f+gx+xx)$ &c. & $\frac{P}{V} = \frac{A+Bx}{a+xx} + \frac{S}{R}$; par ou l'on aura $\frac{P-R(A+Bx)}{a+xx} = S = (C+Ex).(c+ex+xx)(f+gx+xx).$&c.$+(F+Gx).(b+xx).(f+gx+xx)$&c. $+(F'+G'x)(b+xx)(c+ex+xx)$ &c.+&c.; par conſequent $a+xx$ eſt un diviſeur exact de la quantité $P-R(A+Bx)$; donc ſi on conſidere cette quantité

comme une equation dont l'inconnue eſt x, en faiſant $xx+a=o$, ou $xx=-a$, ou $x=\pm\sqrt{-a}$, & ſubſtituant $+\sqrt{-a}$ & en ſuite $-\sqrt{-a}$ au lieu de x dans la même quantité, on aura deux equations, par les quelles on determinera les valeurs de A & de B. Suppoſons pour plus de facilité $m=\sqrt{-a}$, & qu'en ſubſtituant m au lieu de x dans $P-R(A+Bx)$, on ait l'equation $P-R(A+Bm)=o$, & qu'en ſubſtituant $-m$ au lieu de x, P devient p, & R devient r, de ſorte qu'on ait l'autre equation $p-r(A-Bm)=o$, on trouvera par la premiere equation $A+Bm=\frac{P}{R}$, & par la ſeconde $A-Bm=\frac{p}{r}$ d'ou l'on tire par l'addition $2A=\frac{P}{R}+\frac{p}{r}=\frac{Pr+pR}{Rr}$; & par la ſouſtraction $2Bm=\frac{P}{R}-\frac{p}{r}$ & $2B=\frac{Pr-pR}{mRr}$, ou aura donc $A=\frac{Pr+pR}{2Rr}$, & $B=\frac{Pr-pR}{2mRr}$. On raiſonera de même pour trouver les conſtantes F & G du numerateur de la fraction $\frac{F+Gx}{c+ex+xx}$, en ſuppoſant $R=\frac{V}{c+ex+xx}$, & $\frac{P}{V}=\frac{F+Gx}{c+ex+xx}+\frac{S}{R}$; par ou l'on aura $P-R(F+Gx)=o$, ou $F+Gx=\frac{P}{R}$ en ſubſtituant au lieu de x les deux racines que donne l'equation $xx+cx+c=o$,

qui font $x = -\frac{1}{2}e + \sqrt{\frac{1}{4}ee - c}$ & $x = -\frac{1}{2}e - \sqrt{\frac{1}{4}ee - c}$, qu'on peut repreſenter par m & par n. On peut auſſi reduire l'equation $F + Gx = \frac{P}{R}$ à la forme de l'autre $A + Bx = \frac{P}{R}$, en faiſant $x = z - \frac{1}{2}e$ & en ecrivant par tout $z - \frac{1}{2}e$ au lieu de x dans la premiere equation, ce qui donnera $F' + Gz = \frac{P}{R}$ en ſuppoſant $F' = F - \frac{1}{2}Ge$.

EXEMPLE. On a ſuppoſé $\frac{P}{V} = \frac{A + Bx}{a + xx} + \frac{F + Gx}{c + ex + xx}$, & on veut trouver les valeurs de A & de B. on aura $P = H + Kx + Lx^2 + Mx^3$, $V = (a + xx).(c + ex + xx)$, $R = c + ex + xx$, & $A = \frac{Pr + pR}{2Rr}$ en ſubſtituant $m = \sqrt{-a}$ au lieu de x dans P & dans R, & $-m = -\sqrt{-a}$ au lieu de x dans p & r. Or par la 1^e^ ſubſtitution $P = H + Km + Lm^2 + Mm^3$, $R = c + em + mm$; par la 2^e^ ſubſtitution $P = H - Km + Lm^2 - Mm^3$, $r = c - em + mm$; par conſequent $Pr = (H + Km + Lm^2 + Mm^3).(c + mm - em)$, & $pR = (H - Km + Lm^2 - Mm^3) \times (c + mm + em)$. La ſomme de

ces deux produits $Pr + pR = 2H(c+mm) - 2Kemm + 2Lm^2(c+mm) - 2Mm^4e$. Le produit $Rr = (c + mm + em).(c+mm-em) = (c+mm)^2 - eem^2$, Donc $\frac{Pr+pR}{2Rr} = \frac{H(c+mm) - Kemm + Lmm(c+mm) - Mm^4e}{\overline{c+mm}^2 - eemm}$ $= A$ & en ſubſtituant la valeur $-a$ au lieu de mm, on trouve $A = \frac{H(c-a) + Kea - La(c-a) - Maae}{(c-a)^2 + eea}$ comme par la 1.e methode. Pour trouver la valeur de $B = \frac{Pr-pR}{2mRr}$, on ſubſtituira m au lieu de x dans P & dans R & $-m$ au lieu de x dans p & dans r; ce qui donnera $Pr - pR = -2Hem + 2Km(c+mm) - 2Lm^3e + 2Mm^3(c+mm)$, & $2mRr = 2m(c+mm)^2 - 2me^2m^2$ par conſequent $\frac{Pr-pR}{2mRr} = \frac{-He+K(c+mm)-Lm^2e+Mmm(c+mm)}{(c+mm)^2-e^2m^2}$ $= \frac{-He+K(c-a)+Lae-Ma(c-a)}{(c-a)^2+ae^2} = B$, comme par la 1.e methode.

CXXVIII.

Probleme III. Trouver l'intégrale de la fraction $\frac{Pdx}{V}$, lors que ſon dénominateur V renférme des puiſſances rationélles quelconques de binomes ſimples, ou de binomes & trinomes reductibles aux binomes ſimples.

Suppoſons $V = (a+x)^m \cdot (b+x)^n \cdot (c+x)^p \cdot$ &c. les expoſans m, n, p étant des nombres entiers poſitifs plus grands que l'unité; on aura $\frac{P}{V} =$

$$\frac{H + Kx + Lx^2 + Mx^3 + \&c. \ldots + Tx^{\lambda-1}}{(a+x)^m \cdot (b+x)^n \cdot (c+x)^p \; \&c.},$$

l'éxpoſant λ étant égale à la ſomme des éxpoſans $m + n + p +$ &c. lorſque cette ſomme des éxpoſans ne fait pas un grand nombre on peut ſe ſervir de la prémiere méthode des Problémes précedens, en ſuppoſant $\frac{P}{V} =$

$$\frac{A + Bx + Cx^2 + Ex^3 + \cdots + Gx^{m-1}}{(a+x)^m} + \frac{A' + B'x + C'x^2 + E'x^3 \cdots + G'x^{n-1}}{(b+x)^n}$$

$$+ \frac{A'' + B''x + C''x^2 + E''x^3 + \&c. \ldots + G''x^{p-1} + \&c.}{(c+x)^p};$$

Car réduiſant toutes ces fractions au même dénominateur V, & égalant la ſomme de tous les termes des numérateurs dans les quels x a le même éxpoſant au terme corréſpondant de P, ou à zero, on aura autant d'équations ſimples qu'il y a de conſtantes indéterminées A, B, C, E, G, A', B', C', E', G', A'', B'', C'', &c., on déterminera ces conſtantes, & on intégrera en ſuite chaque fraction ſeparée par les méthodes du Chapitre précedent. Mais comme cette 1.re méthode eſt peu practicable lors que la ſomme des éxpoſans $m + n + p +$ &c. eſt un grand nombre; on pourra dans ce cas ſe ſervir des méthodes ſuivantes.

Prémierement puifque $\frac{P\,dx}{V} = \frac{H\,dx}{V} + \frac{Kx\,dx}{V} + \frac{Lx^2\,dx}{V} + \frac{Mx^3\,dx}{V} + \&c.... + \frac{Tx^{\lambda-1}\,dx}{V}$, on peut chercher féparement les intégrales de chacune de ces fractions, & en faire la fomme, qui fera l'intégrale de la fraction propofée $\frac{P\,dx}{V}$. Or chacune de ces fractions peut fe réduire à d'autres fractions dont les numerateurs font des conftantes & les denominateurs font V, ou des facteurs de V: Car $\frac{Kx}{x+a} = K - \frac{Ka}{a+x}$, & $\frac{Kx\,dx}{V} = \frac{K\,dx}{(a+x)^{m-1}.(b+x)^n.(c+x)^p.\&c.} - \frac{Ka\,dx}{V}$; $\frac{Lx^2}{(x+a)} = Lx - \frac{Lax}{x+a}$, $\frac{Lx^2\,dx}{V} = \frac{Lx\,dx}{(a+x)^{m-1}.(b+x)^n.(c+x)^p\,\&c.} - \frac{Lax\,dx}{V}$, & chacune de ces deux fractions peut fe réduire encore comme la fraction $\frac{Kx\,dx}{V}$, & ainfi des autres. Donc la difficulté fe réduit à l'intégration d'une fraction comme $\frac{A\,dx}{Q}$, A étant une quantité conftante, & Q étant V, ou un facteur de V. la fraction $\frac{A\,dx}{(a+x)^m.(b+x)^n.(c+x)^p.\&c.}$ en faifant $a+x = y^{-1}$, $x = y^{-1} - a = (1-ay)y^{-1}$, $b+x = (1+\overline{b-a}.y)y^{-1}$ & $c+x = (1+\overline{c-a}.y)y^{-1}$ fe réduit à celle-ci $\frac{-Ay^{-2}\,dy}{y^{-m}(1+\overline{b-a}.y)^n\,y^{-n} \times (1+\overline{c-a}.y)^p.y^{-p} \times \&c.}$ =

$= \frac{-Ay^{m+n+p-2}dy}{(1+\overline{b-a}.y)^n \cdot (1+\overline{c-a}.y)^p \cdot \&c.}$, fraction qu'on pourra encore réduire en divisant le numérateur par le dénominateur, & en suite par les facteurs du dénominateur; jusqu'à ce qu'on soit arrivé à des restes, qu'on réduira encore à des fractions, dont le numérateur ne contiendra qu'une seule puissance d'un binome simple; & on trouvera les intégrales par les méthodes du Chapitre précédent.

On peut aussi réduire tout d'un coup la fraction $\frac{Pdx}{V} = \frac{Hdx + Kxdx + Lx^2dx + Mx^3dx + \&c.}{(a+x)^m \cdot (b+x)^n \cdot (c+x)^p \cdot \&c.}$ en supposant $a+x = y^{-1}$, & en substituant par tout $-y^{-2}dy$ au lieu de dx, $(1-ay)y^{-1}$ au lieu de x; $(1+\overline{b-a}.y)y^{-1}$ au lieu de $b+x$; $(1+\overline{c-a}.y)y^{-1}$ au lieu de $c+x$, &c. ce qui donnera $\frac{Pdx}{V} =$

$$\frac{-Hy^{m+n+p-2}dy - Ky^{m+n+p-3}(1-ay).dy - Ly^{m+n+p-4}(1-ay)^2dy - \&c.}{(1+\overline{b-a}.y)^n \times (1+\overline{c-a}.y)^p \times \&c.}$$

fraction qu'on pourra encore réduire en divisant d'abord le numérateur par le dénominateur, ou par ses facteurs, & en supposant en suite $1+by-ay = u^{-1}$, ou $y = \frac{u^{-1}-1}{b-a}$, & $dy = \frac{-u^{-2}du}{b-a}$.

EXEMPLE. Pour intégrer la fraction $\frac{4xdx}{(1+x)^2 \cdot (2+x)^1}$, on la comparera avec la formule ge-

nerale $\frac{H dx + K x dx + L x^2 dx + M x^3 dx + \&c.}{(a+x)^m . (b+x)^n . (c+x)^p . \&c.}$, & on aura $H = o$, $K = 4$, $L = o$, $a = 1$, $b = 2$, $m = 2$, $n = 3$, $p = o$; en substituant ces valeurs dans la formule generale $\frac{P dx}{V} = \frac{-H y^{m+n+p-2} dy - K y^{m+n+p-3} (1 - ay) dy}{(1 + \overline{b - a}.y)^n \times (1 + \overline{c - a}.y)^p}$. on aura $\frac{4 x dx}{(1+x)^2 . (2+x)^3} = \frac{-4 y^2 (1-y) dy}{(1+y)^3}$, & $a + x = 1 + x = y^{-1}$, ou $y = \frac{1}{1+x}$. Or en supposant $y + 1 = z$, on trouve $\frac{-4 y^2 (1-y) dy}{(1+y)^3} = \frac{4 z^3 dz - 16 z^2 dz + 20 z dz - 8 dz}{z^3}$ $= 4 dz - \frac{16 dz}{z} + \frac{20 dz}{zz} - \frac{8 dz}{z^3}$; & l'intégrale cherchée $4z - 16 Lz - \frac{20}{z} + \frac{4}{zz} = \frac{4(x+2)}{x+1} - 16 L\left(\frac{x+2}{x+1}\right) - \frac{20(x+1)}{x+2} + \frac{4(x+1)^2}{(x+2)^2}$, en substituant $\frac{x+2}{x+1}$ au lieu de z.

On pourroit aussi employér cette autre methode qui est assés simple. Supposant $V = (a+x)^n R$, & $\frac{P}{V} = \frac{A' + B'x + C'x^2 + E'x^3 + \&c. \ldots\ldots + G'x^{n-1}}{(a+x)^n} + \frac{S}{R}$, on demontre facilement qu'en divisant le numerateur $A' + B'x + C'x^2 + E'x^3 + \&c.\ldots G'x^{n-1}$, par les facteurs $(x+a)^{n-1}$, $(x+a)^{n-2}$, $(x+a)^{n-3}$ &c. du denominateur $(x+a)^n$ on peut toujours reduire la fraction

$\frac{A' + B'x + C'x^2 + E'x^3 + \&c. \ldots\ldots + G'x^{n-1}}{(x+a)^n}$ a celles-cy $\frac{A}{(x+a)^n}$ $+ \frac{B}{(x+a)^{n-1}} + \frac{C}{(x+a)^{n-2}} + \frac{E}{(x+a)^{n-3}} +$ &c. ...... $\frac{G}{x+a}$, dont les numerateurs $A, B, C, E,$ &c. G sont des quantités constantes qu'il faudra detérminer. On aura donc $\frac{P}{V} = \frac{A}{(x+a)^n} + \frac{B}{(x+a)^{n-1}} + \frac{C}{(x+a)^{n-2}} + \frac{E}{(x+a)^{n-3}} +$ &c. ...... $+ \frac{G}{x+a} + \frac{S}{R}$; d'ou l'on deduira

$$S = \frac{P - RA - RB(x+a) - RC(x+a)^2 - RF(x+a)^3 - \&c. \ldots RG(x+a)^{n-1}}{(x+a)^n}.$$

Le numerateur de cette fraction ayant l'entier S pour quotient, sera divisible par $(x+a)^n$, & par ses facteurs $(x+a)^{n-1}$, $(x+a)^{n-2}$ &c. & $x+a$. Donc si on considere ce numerateur comme une equation dont x est l'inconnue, en faisant $P - RA - RB(x+a) - RC(x+a)^2$ $- RE(x+a)^3 -$ &c. ..... $RG(x+a)^{n-1} = 0$ & qu' on la divise par sa racine $x+a=0$ le quotient sera $=0$, ou si l'on substitue zero au lieu de $x-+a$ dans tous les termes ou $x+a$ se trouve, il ne restera que $P - RA$ qui doit etre aussi divisible par $x+a$, & le quotient doit etre zero. Donc si dans la quantité $P - RA$, on met $-a$ au lieu de x on aura $P - RA = 0$, & $A = \frac{P}{R}$, apres avoir substitué $-a$ au lieu de x dans P & dans R.

Ayant ainſi determiné la valeur de la conſtante A, ſi on diviſe encore l'equation $P - RA - RB(x+a) - RC(x+a)^2 - RE(x+a)^3 - \&c. \ldots - G(x+a)^{n-1} = o$, par $x+a=o$, on aura $\frac{P-RA}{x+a} - RB = o$, les autres termes $- RC(x+a) - RE(x+a)^2 - \&c. \ldots - G(x+a)^{n-2}$ s'evanouïſſant. Donc ſi on fait $\frac{P-RA}{x+a} = P'$ en laiſſant x, variable, on aura $P' - RB = o$, & $B = \frac{P'}{R}$ aprés avoir ſubſtitué $-a$ au lieu de x, dans P' & dans R. De même ayant ainſi determiné les valeurs des conſtantes A & B, ſi on diviſe encore $P' - RB - RC(x+a) - RE(x+a)^2 - \&c. \ldots - G(x+a)^{n-2}$ par $x+a=o$, on aura $\frac{P'-RB}{x+a} - RC - RE(x+a) - \&c. \ldots G(x+a)^{n-3} = o$, ou $\frac{P'-RB}{x+a} - RC = o$ & en ſuppoſant $\frac{P'-RB}{x+a} = P''$, on aura $P'' - RC = o$ & $C = \frac{P''}{R}$, aprés avoir ſubſtitué $-a$, au lieu de x dans P'' & dans R. On continuera de la même maniere & avec la même facilité a determinér les autres conſtantes E, F, G &c.

CXXIX.

PROBLEME IV. Trouver l'intégrale de la fraction $\frac{P\,dx}{V}$, lorſque le denominateur V a pour facteurs des

puiſſances rationelles de binomes ou trinomes irreductibles du ſecond degré. Soit $\frac{P}{V} =$

$$\frac{H + Kx + Lx^2 + Mx^3 + \&c. \ldots . Tx^{\lambda-1}}{(a + xx)^n \cdot (b + cx + xx)^m \&c.} =$$

$$\frac{A + Bx + Cx^2 + Ex^3 + \ldots . Gx^{n-1}}{(a + xx)^n} +$$

$$\frac{A' + B'x + Cx^2 + Ex^3 + \&c. \ldots Gx^{m-1} + \&c.}{(b + cx + xx)^m}$$

On trouvera les valeurs des conſtantes indeterminées $A, B, C,$ &c. $A', B'C',$ &c. par la 1e methode des problemes precedens, en reduiſant ces fractions au denominateur commun V, & en egalant les termes correspondans des numerateurs, pour avoir autant d'equations qu'il y a de conſtantes a determiner.

On pourra ſe ſervir de cette autre méthode.

Suppoſant $V = (a + xx)^n . R$, & $\frac{P}{V} =$
$\frac{A' + B'x + C'x^2 + E'x^3 + \&c. \ldots . + G'x^{n-1}}{(xx + a)^n} + \frac{S}{R}$, on demontre facilement qu'en diviſant le numérateur $A' + B'x + C'x^2 + E'x^3 + \&c. \ldots \ldots + G'x^{n-1}$ par les facteurs $(xx + a)^{n-1}, (xx + a)^{n-2}, (xx + a)^{n-3}$ &c. & $xx + a$ du dénominateur $(xx + a)^n$, la fraction

$\frac{A' + B'x + C'x^2 + E'x^3 + \&c. \ldots + G'x^{n-1}}{(xx+a)^n}$ peut toujours se réduire a celles-ci $\frac{A + Bx}{(xx+a)^n} + \frac{C + Ex}{(xx+a)^{n-1}} + \frac{F + Gx}{(xx+a)^{n-2}} +$ &c..... $+ \frac{H' + K'x}{xx+a}$, les lettres A, B, C, E, F, G, H' K' signifiant des quantités constantes, ou zero. On aura donc $\frac{P}{V} = \frac{A + Bx}{(xx+a)^n} + \frac{C + Ex}{(xx+a)^{n-1}} + \frac{F + Gx}{(xx+a)^{n-2}} +$ &c..... $+ \frac{H' + K'x}{xx+a} + \frac{S}{R}$; d'ou l'on deduira comme cidessus $S =$

$$\frac{P - R(A+Bx) - R(C+Ex).(xx+a) - R(F+Gx).(xx+a)^2 - \&c. \ldots R(H'+K'x).(xx+a)^{n-1}}{(xx+a)^n}$$

fraction dont le numérateur sera divisible par la puissance $(xx+a)^n$ & par tous ses facteurs $(xx+a)^{n-1}$, $(xx+a)^{n-2}$, &c. & $xx+a$. Donc en raisonnant comme dans la derniere méthode du Probléme précédent, si on divise le numérateur par $xx+a=0$, supposition qui donne $x = +\sqrt{-a} = m$, & $x = -\sqrt{-a} = -m$, on aura $P - R(A+Bx) = 0$, & $A + Bx = \frac{P}{R}$, d'ou l'on tire deux équations en écrivant succéssivement m & $-m$, ou $+\sqrt{-a}$, & $-\sqrt{-a}$, au lieu de x dans les quantités Bx, P & R; & on determinera par ces équations les valeurs des constantes A & B, comme on a fait ci-dessus. Après avoir substitué les va-

leurs trouvées de A & de B, si on divise encore par $xx+a=o$, l'équation $P-R(A+Bx)-R(C+Ex)(xx+a)-R(F+Gx)(xx+a)^2-$&c.... $R(H'+K'x)(xx+a)^{n-1}$, on aura $\frac{P-R(A+Bx)}{xx+a}-R(C+Ex)=o$; les autres termes dans les quels se trouve $xx+a$, s'évanouïssant par la supposition de $xx+a=o$. Si donc on suppose $\frac{P-R(A+Bx)}{xx+a}=P'$ en laissant x variable, on aura $P'-R(C+Ex)=o$, & $C+Ex=\frac{P'}{R}$, ce qui donnera encore deux équations pour trouver les valeurs de C & de E en substituant succéssivement $+m$ & $-m$ au lieu de x. Ayant déterminé les valeurs de C & de E, on divisera encore l'équation par $xx+a=o$, & on aura $\frac{P'-R(C+Ex)}{xx+a}-R(F+Gx)=o$, d'ou l'on tirera l'équation $F+Gx=\frac{P''}{R}$ en supposant $P''=\frac{P'-R(C+Ex)}{xx+a}$, & on déterminera les valeurs de F & de G par les deux substitutions de m & $-m$ au lieu de x dans l'équation $F+Gx=\frac{P''}{R}$. On voit bien qu'on peut continuer de la même maniere pour déterminer les valeurs de toutes les autres constantes. Il est clair aussi que si au lieu du binome $xx+a$ on avoit proposé un trinome irréductible comme $b+cx+xx$ ce seroit la même solution; puisque le trinome se réduit

au binome en faifant $x = z - \frac{1}{2}c$, & en fubftituant par tout $z - \frac{1}{2}c$ au lieu de x.

CXXX.

COROLLAIRE GENERAL. Il fuit de tout ce qui vient d'être dit dans le cours de cet Article, qu'on pourra toujours, en fe fervant des methodes des Problemes precedens, intégrer la fraction rationelle $\frac{Pdx}{V}$, lorfque le numerateur P etant de la forme $H + Kx + Lx^2 + Mx^3 \ldots\ldots + \&c.$, de façon que le plus haut expofant de x foit moindre que le plus haut expofant de la même quantité x dans le denominateur V, ledit denominateur V pourra fe decompofer en binomes fimples, en binomes & trinomes du fecond degré reductibles & irreductibles, & en puiffances rationélles de binomes fimples, & de binomes & trinomes reductibles & irreductibles du fecond degré; c'eft a dire lorfqu'on aura $V = (a + x)$ &c. $(xx - b)\,(xx + cx + e)$ &c. $(xx + f)\,(xx + gx + l)$ &c. $(m + x)^{\beta}$ &c. $(xx - n)^{\gamma}\,(xx + px + q)^{\delta}$ &c. $(xx + r)^{\varepsilon}\,(xx + fx + t)^{\lambda}$ &c. Soppofant les quantités $xx - b$, $xx + cx + e$, &c. reductibles aux binomes fimples; celles $xx + f$, $xx + gx + l$, &c. irreductibles; $xx - n$, $xx + px + q$, &c. reductibles; $xx + r$, $xx + fx + t$, &c. irreductibles.

ARTICLE TROISIEME.

De la maniere de resoudre le denominateur Q de la fraction rationelle $\frac{Pdx}{Q}$ en facteurs réels d'une ou de deux dimensions.

CXXXI.

Nous supposons toujours que le denominateur Q est un polynome de la forme $x^{\lambda}+Ax^{\lambda-1}+Bx^{\lambda-2}+\ldots\ldots+Mx+N$; l'exposant λ etant un nombre entier positif; A, B, C, M des constantes réelles ou zero, & le dernier terme aussi réel & positif, ou negatif. On peut aussi lui donner cette forme $x^{\lambda}+kcx^{\lambda-1}+mc^2x^{\lambda-2}+nc^3x^{\lambda-3}+\cdots\cdots qc^{\lambda-1}x\pm c^{\lambda}$, en faisant $\pm c^{\lambda}=N$; $k=\frac{A}{c}$; $m=\frac{B}{c^2}$; $n=\frac{C}{c^3}$; $q=\frac{M}{c^{\lambda-1}}$, &c., & alors k, m, n, q, &c. sont des nombres réels & connus que nous appellerons les *coefficiens numeriques* des termes ou ils se trouvent.

CXXXII.

Pour trouver les facteurs du polynome Q, on le supposera egal a zero, & on en fera une equation dont la variable ou l'inconnue sera x. On cherchera ensuite

par les methodes connues toutes les racines réelles de cette equation, comme $x=a$, $x=-b$, & chacune de ces racines donnera un facteur simple & réel du polynome Q; puisque l'equation $Q=o$ sera exactement divisible par $x-a=o$, par $x+b=o$, &c. de sorte que, si toutes les racines de l'equation $Q=o$ sont réelles, le polynome Q sera entierement decomposé dans ses facteurs réels, & simples. Mais si cette equation a des racines imaginaires il faudra chercher par les methodes que nous allons expliquer les facteurs réels de deux dimensions qui renferment toutes les racines imaginaires prises deux a deux.

CXXXIII.

THEOREME. Si l'exposant λ de la plus haute puissance de x dans l'equation $Q=o$ est un nombre impair, cette equation aura au moins une racine réelle, & le polynome Q un facteur réel simple.

DEMONSTRATION. Soit $\lambda=2\mu+1$, & $Q=x^{2\mu+1}+Ax^{2\mu}+Bx^{2\mu-1}\ldots\ldots\pm N=y$, equation a deux variables x & y, qu'on peut rapporter a une courbe $MBCM'$, (fig. 10.) dont l'abscisse $AP=x$, & l'ordonnée correspondante $PM=y$. Si dans cette equation $Q=y$ on suppose x ou $AP=o$, on aura l'ordonnée AB ou $y=\pm N$ quantité réelle. Soit premierement $AB=+N$ quantité positive; Si dans cette supposi-

tion on prend pour x ou pour AP une quantité assez grande, pour que $x^{2\mu+1}$ surpasse la somme de tous les termes negatifs, qui peuvent se trouver dans Q, on aura encore pour l'ordonnée PM ou y une quantité positive; mais si on prend pour $-x$ une quantité AP', telle que $-x^{2\mu+1}$ soit plus grande que la somme de tous les termes positifs de Q, l'ordonnée correspondante $P'M'$ sera negative, & la courbe MBM' coupera l'axe PAP' en un point C, ou l'on aura $y=o$, par consequent $Q=o$, & la quantité réelle $AC=-x$ sera une racine réelle de l'equation $Q=o$.

Soit en second lieu $AB=-N$ quantité negative. Si dans cette supposition on prend pour x, ou pour AP' une quantité si grande que $x^{2\mu+1}$ surpasse la somme de tous les termes negatifs de Q, on aura pour l'ordonnée correspondante y, ou $P'M'$ une quantité positive. Si on prend pour $-x$ l'abscisse AP si grande, que $-x^{2\mu+1}$ surpasse la somme de tous les termes positifs de Q, l'ordonnée correspondante PM sera negative & la courbe $M'BM$ coupera encore l'axe en un point C, ou l'on aura $y=o$, $Q=o$, & la quantité réelle $AC=x$ sera une racine réelle de l'equation $Q=o$. *C.Q.F.D.*

CXXXIV.

THEOREME. Si l'exposant λ de la plus haute puissance de x dans l'equation $Q=o$ est un nombre pair,

& que le dernier terme de cette equation soit negatif, ou $-N$; cette equation aura au moins deux racines réelles, & le polynome Q deux facteurs réels simples.

DEMONSTRATION. Soit $\lambda = 2\mu$, & $Q = x^{2\mu} + Ax^{2\mu-1} + Bx^{2\mu-2} + \cdots\cdots - N = y$, equation qu'on peut rapporter a une courbe, dont les abscisses soient x, & les ordonnées correspondantes y. Si dans l'equation $Q = o$, on suppose $x = o$, on aura pour l'ordonnée y une quantité réelle negative $-N$; & si l'on prend pour x une quantité positive si grande, que $x^{2\mu}$ surpasse la somme de tous les termes negatifs de Q, l'ordonnée y sera positive; Par consequent la courbe coupera l'axe, & l'equation $Q = o$ aura une racine réelle. De même si on prend pour x une quantité negative si grande que sa puissance paire $x^{2\mu}$, qui sera toujours positive, surpasse la somme de tous les termes negatifs de Q, l'ordonnée correspondante y sera encore positive, par consequent la courbe coupera encore l'axe en un autre point opposé, & l'equation $Q = o$ aura encore une autre racine réelle; elle aura donc au moins deux racines réelles. *C. Q. F. D.*

CXXXV.

COROLLAIRE. L'equation generale $Q = o$ peut toujours se reduire a cette forme $x^{2\mu} + Acx^{2\mu-1} +$

$Bc^2x^{2\mu-2}+Cc^3x^{2\mu-3}+\cdots\cdots+c^{2\mu}=0$, μ etant un nombre positif quelconque, & A, B, C, &c. des coefficiens numeriques réels, ou zero. Car si l'exposant de la plus haute puissance de x dans Q est un nombre impair, on pourra diviser l'equation $Q=0$ par $x\pm a=0$, & la reduire a une equation de dimension paire; & si le dernier terme de cette equation est negatif, on pourra la diviser par l'equation de deux dimensions, qui sera le produit de deux racines réelles de l'equation $Q=0$, & on continuera la division, jusqu'a ce qu'on ait employé tous les facteurs réels & simples de Q, ou qu'on soit parvenu a une equation de dimension paire, dont le dernier terme soit positif.

EXEMPLES. Soit $Q=x^{2\mu+1}+c^{2\mu+1}$. Ayant supposé $x^{2\mu+1}+c^{2\mu+1}=0$, on aura $x^{2\mu+1}=-c^{2\mu+1}$; $x=-c$, $x+c=0$; en divisant $x^{2\mu+1}+c^{2\mu+1}$ par $x+c$, on trouve le quotient $x^{2\mu}-cx^{2\mu-1}+c^2x^{2\mu-2}-c^3x^{2\mu-3}+\cdots\cdots-c^{2\mu-3}x^3+c^{2\mu-2}x^2-c^{2\mu-1}x+c^{2\mu}=0$.

Si $Q=x^{2\mu+1}-c^{2\mu+1}=0$, on trouve $x-c=0$; & le quotient $x^{2\mu}+cx^{2\mu-1}+c^2x^{2\mu-2}+c^3x^{2\mu-3}+\cdots\cdots+c^{2\mu-3}x^3+c^{2\mu-2}x^2+c^{2\mu-1}x+c^{2\mu}=0$.

Soit $Q=x^{2\mu}-c^{2\mu}$; ayant supposé $x^{2\mu}-c^{2\mu}=0$, on trouve $x^{2\mu}=c^{2\mu}$; $x^\mu=\pm c^\mu$, & $x^{2\mu}-c^{2\mu}=(x^\mu+c^\mu).(x^\mu-c^\mu)$.

CXXXVI.

Nous appellerons *reciproque* le polynome $x^{\lambda} + Acx^{\lambda-1} + Bcx^{\lambda-2} + \cdots\cdots + Bc^{\lambda-2}x^{2} + Ac^{\lambda-1}x + c^{\lambda}$, dans lequel les coefficiens numériques du prémier & du dernier terme, & ceux de tous les autres termes egalement eloignés des deux extremes sont les mêmes, & ont les mêmes signes $+$, ou $-$; & si on fait une equation de ce polynome en l'egalant a zero, cette equation sera aussi nommée *reciproque*.

CXXXVII.

COROLLAIRE I. Le binome $x^{\lambda} + c^{\lambda}$ est reciproque, puisque le coefficient numerique du premier, & du dernier terme est $+1$, & que les coefficiens numeriques des autres termes, qui manquent peuvent être exprimés par $+o$.

CXXXVIII.

COROLLAIRE II. Le trinome $x^{2\mu} + 2Kc^{\mu}x^{\mu} + c^{2\mu}$, dans lequel K est un nombre positif, ou negatif est reciproque; car on peut l'exprimer par ce polynome $x^{2\mu} + Kc^{\mu}x^{\mu} + Kc^{\mu}x^{\mu} + c^{2\mu}$, qui a les conditions requises.

CXXXIX.

COROLLAIRE III. Tout polynome reciproque $x^\lambda + Acx^{\lambda-1} + Bc^2x^{\lambda-2} + \ldots\ldots\ldots\ldots + Bc^{\lambda-2}x^2 + Ac^{\lambda-1}x + c^\lambda$ eſt compoſé de deux parties ſemblables, l'une $x^\lambda + Acx^{\lambda-1} + Bc^2x^{\lambda-2} + \&c.$, & l'autre $c^\lambda + Ac^{\lambda-1}x + Bc^{\lambda-2}x^2 + \&c.$, de ſorte qu'en mettant c au lieu de x, & x au lieu de c dans la premiere partie, elle devient la ſeconde; & reciproquement en ecrivant x au lieu de c, & c au lieu de x dans la ſeconde partie, elle ſe change en la premiere. Il faut ſeulement remarquer que, quand l'expoſant λ eſt un nombre impair, les deux parties reciproques ont le même nombre de termes; mais lorſque λ eſt un nombre pair, il y a dans le polynome un terme mitoyen, ou egalement eloigné des extremes, dont on peut ajouter la moitié a chaque partie pour les rendre parfaitement ſemblables, comme nous avons fait dans le Corollaire precedent.

CXL.

LEMME. Si on multiplie le polynome reciproque $x^{\lambda-2} + mcx^{\lambda-3} + nc^2x^{\lambda-4} + pc^3x^{\lambda-5} + qc^4x^{\lambda-6} \ldots\ldots + qc^{\lambda-6}x^4 + pc^{\lambda-5}x^3 + nc^{\lambda-4}x^2 + mc^{\lambda-3}x + c^{\lambda-2}$ par le trinome reciproque $x^2 + kcx + c^2$, le produit ſera un

polynome reciproque qui aura pour coefficiens numeriques de ſes termes 2e, 3e, 4e, 5e, 6e &c. les quantités $m+k$, $n+km+1$, $p+kn+m$, $q+kp+n$, $r+kq+p$, $s+kr+q$, &c. on demontre ce Lemme en multipliant la premiere partie $x^{\lambda-2}+mcx^{\lambda-3}+nc^2x^{\lambda-4}+$ &c. par $x^2+kcx+c^2$, & enſuite la ſeconde Partie $c^{\lambda-2}+mc^{\lambda-3}x+nc^{\lambda-4}x^2+$ &c. par $c^2+kcx+x^2$.

CXLI.

LEMME. On ſait que l'equation $xx+px+q=o$, dans laquelle q eſt une quantité réelle quelconque, & p une quantité réelle ou zero, peut repreſenter toutes les equations réelles de deux dimenſions, & que ſes racines ſont $x=-\frac{1}{2}p+\sqrt{\frac{1}{4}pp-q}$, & $x=-\frac{1}{2}p-\sqrt{\frac{1}{4}pp-q}$.

CXLII.

COROLLAIRE I. Les racines de l'equation generale $xx+px+q=o$ Seront réelles 1.o lorſque q ſera une quantité negative; 2.o lorſque $\frac{1}{4}pp$ ne ſera pas plus petit que q; car, Si $\frac{1}{4}pp=q$, on aura $x=-\frac{1}{2}p$. Mais elles

elles feroient imaginaires si, q etant positive, $\frac{1}{4}pp$ etoit plus petit que q; puis qu' alors $\frac{1}{4}pp - q$ sera une quantité negative.

CXLIII.

COROLLAIRE II. L'equation $xx - 2ax + aa + bb = o$, dans laquelle b est une quantité réelle quelconque, & a une quantité réelle, ou zero, & dont les racines sont $x = a + b\sqrt{-1}$, & $x = a - b\sqrt{-1}$, peut representer toutes les equations du second degré dont les racines sont imaginaires. Car supposant que dans l'equation generale du second degré $xx + px + q = o$ la quantité q soit positive, & $\frac{1}{4}pp$ plus petit que q, afin que les racines de cette equation soient imaginaires, on pourra toujours supposer $-2a = p$, ou $a = -\frac{1}{2}p$, & $aa + bb$, ou $\frac{1}{4}pp + bb = q$; ce qui donne $bb = q - \frac{1}{4}pp$, & $b = \pm\sqrt{q - \frac{1}{4}pp}$, quantité réelle par la supposition.

CXLIV.

COROLLAIRE III. L'equation $xx - 2bax + aa = o$, dans laquelle a est une quantité réelle quelconque, & b un nombre moindre que l'unité, ou zero peut repre-

ſenter toutes les equations réelles du ſecond degré, dont les racines ſont imaginaires. Car ſi, dans l'equation genarale $xx+px+q=o$; on ſuppoſe q poſitive, & $\frac{1}{4}pp$ plus petit que q, on pourra toujours faire $aa=q$, ou $a=\pm\sqrt{q}$, & $-2ba=p$, ou $b=-\frac{p}{2a}$.

CXLV.

COROLLAIRE IV. L'equation $xx-2ax.\text{Cos.}N+aa=o$, dans laquelle on ſuppoſe que a ſoit une quantité réelle poſitive ou negative, & N un angle, ou un arc pris dans un cercle dont le rayon eſt l'unité, peut repreſenter toutes les equations réelles du ſecond degré a racines imaginaires, excepté le cas de $\text{Cos.}N=\pm 1$; car l'arc N etant pris dans un cercle dont le rayon eſt l'unité, ſon Coſinus eſt toujours un nombre quelconque moindre que l'unité, lors qu'il n'eſt pas ± 1, ou zero. ainſi on peut le mettre a la place de b dans l'equation $xx-2bax+aa=o$. Mais lorſque b, ou Cos. N dans ces deux equations eſt ± 1, elles ſe changent en $xx\pm 2ax+aa=o$, quarré dont la racine eſt $x\pm a=o$. Il faut auſſi remarquer que les racines de l'equation $xx-2ax.\text{Cos.}N+aa=o$ ſont $x=a.\text{Cos.}N+a.\text{Sin.}N.\sqrt{-1}$, & $x=a.\text{Cos.}N-a.\text{Sin.}N\sqrt{-1}$. Car on a $x=a.\text{Cos.}N\pm\sqrt{aa.\overline{\text{Cos.}N}^2-aa}$: or, dans le cercle

dont le rayon eſt 1, on a $\overline{\text{Cos.} N}^2 + \overline{\text{Sin.} N}^2 = 1$, par conſequent $\overline{\text{Cos.} N}^2 - 1 = -\overline{\text{Sin.} N}^2$; Donc $x = a.\ \text{Cos.} N \pm a\sqrt{\overline{\text{Cos.} N}^2 - 1} = a.\text{Cos.} N \pm a\sqrt{-\overline{\text{Sin.} N}^2} = a.\ \text{Cos.} N \pm a \text{Sin.} N.\sqrt{-1}$.

CXLVI.

COROLLAIRE V. L' equation $xx - 2bcx + kcc = o$, dans laquelle c eſt une quantité donnée, b & k des nombres indeterminés, peut repreſenter l' equation generale $xx + px + q = o$, en faiſant $kcc = q$, ou $k = \frac{q}{cc}$, & $-2bc = p$, ou $b = -\frac{p}{2c}$.

A l' aide de ces préliminaires on entendra facilement les methodes que nons allons propoſer pour trouver les facteurs réels doubles, ou de deux dimenſions du polynome $Q = o$.

CXLVII.

PREMIERE METHODE. Lorſqu'on voudra chercher generalement tous les facteurs réels doubles du polynome Q, on diviſera ce polynome par $xx + px + q$, ou par $xx - 2bcx + kcc$, & on pouſſera la diviſion, juſqu'a ce qu'on ſoit parvenu a un reſte de la forme $Mx + k$, dans lequel xx ne ſe trouve plus, & comme la diviſion doit eſtre ſans reſte, on fera $Mx = o$, ou $M = o$, &

$k=o$; ce qui donnera deux equations pour trouver les valeurs des deux indeterminées p & q, ou b & k. Mais si on veut trouver seulement les facteurs réels doubles a racines imaginaires, on divisera Q par l'un des trois facteurs $xx-2bax+aa$, ou $xx-2ax+aa+bb$, ou $xx-2ax$. Cos. $N+aa$, & le reste fournira deux equations pour trouver les valeurs des deux indeterminées b & a, ou a & b, ou a, & Cos. N.

CXLVIII.

EXEMPLE I. Soit $Q=x^3+c^3$; en divisant par $xx-2bcx+kcc$ le quotient est $x+2bc$, & le reste $4b^2c^2x-kc^2x-2bkc^3+c^3$; par consequent on aura les deux equations $4b^2c^2-kc^2=o$, & $c^3-2bkc^3=o$, d'ou l'on tire $k=4b^2$; $1=2bk=8b^3$, & $2b=1$; $k=1$; le facteur double est donc $xx-cx+cc$, & le facteur simple $x+2bc=x+c$.

CXLIX.

EXEMPLE II. Soit $Q=x^4+c^4$: en divisant par $xx-2ax+aa+bb$, ou par $xx-2ax+r$, en faisant $r=aa+bb$, le quotient sera $x^2+2ax+4aa-r$, & le reste de la division $8a^3x-4arx+c^4-4aar+rr$; Ce qui donne les deux equations $8a^3-4ar=o$, &

$c^4 - 4aar + rr = 0$; d'ou l'on tire $2aa = r$, & $c^4 = 4a^4$, ou $cc = 2aa$; $2a = \pm c\sqrt{2}$. Les deux facteurs doubles sont donc $xx + cx\sqrt{2} + cc$, & $xx - cx\sqrt{2} + cc$.

CL.

SECONDE METHODE. Si le polynome Q a la forme $x^\lambda + Ax^{\lambda-1} + Bx^{\lambda-2} + Cx^{\lambda-3} \ldots\ldots + N$, on prendra pour un de ses deux facteurs le polynome R, ou $x^{\lambda-2} + A'x^{\lambda-3} + B'x^{\lambda-4} + C'x^{\lambda-5} \ldots\ldots + H$; A', B', C', H etant des constantes indeterminées; on multipliera R par l'autre facteur de deux dimensions $xx + px + q$, ou par $xx - 2ax + aa + bb$, ou par $xx - 2bax + aa$, ensuite on egalera chaque terme du produit au terme du polynome Q, dans lequel x a le mesme exposant, ou a zero, si Q n'a point de terme correspondant a celui du produit. On aura par la autant d'equations qu'il y a de constantes indeterminées dans les deux facteurs, & on determinera leurs valeurs par la comparaison de ces equations.

CLI.

Si le polynome a la forme $x^\lambda + Acx^{\lambda-1} + Bc^2x^{\lambda-2} + Cc^3x^{\lambda-3} \ldots\ldots + c^\lambda$; A, B, C, &c. etant des coefficients numeriques donnés, on prendra pour le fa-

ƒteur R le polynome $x^{\lambda-2}+mcx^{\lambda-3}+nc^2x^{\lambda-4}+pc^3x^{\lambda-5}\ldots\ldots\pm\frac{c^{\lambda-2}}{k}$ & pour l'autre facteur le trinome $xx+bcx+kcc$; b, k, m, n, p, q, &c. etant des coefficiens numeriques indeterminés, dont on trouvera les valeurs en egalant les termes du produit aux termes correſpondans du polynome Q, & en comparant les equations qui en reſultent.

CLII.

Cette methode eſt ſurtout d'uſage lorſque le polynome Q eſt reciproque, ou de la forme $x^{\lambda}+Acx^{\lambda-1}+Bc^2x^{\lambda-2}\ldots\ldots+Bc^{\lambda-2}x^2+Ac^{\lambda-1}x+c^{\lambda}$. Car alors on peut prendre pour le facteur R le polynome reciproque $x^{\lambda-2}+mcx^{\lambda-3}+nc^2x^{\lambda-4}+pc^3x^{\lambda-5}\ldots\ldots\ldots+pc^{\lambda-5}x^3+nc^{\lambda-4}x^2+mc^{\lambda-3}x+c^{\lambda-2}$, & pour l'autre facteur le trinome reciproque $x^2+kcx+cc$, & par le Lemme N°. CXL. on aura les equations ſuivantes $m+k=A, n+km+1=B, p+kn+m=C, q+kp+n=D, r+kq+p=E$, &c., par leſquelles on trouvera les valeurs réelles de k dans tous les cas particuliers ou l'expoſant λ ſera determiné; car on aura dans chaque cas autant d'equations qu'on aura ſuppoſé de coefficients numeriques indeterminés dans les deux fa-

ĉteurs $xx+kcx+cc$, & R, ou $x^{\lambda-2}+mcx^{\lambda-3}+nc^2x^{\lambda-4}+pc^3x^{\lambda-5}+$&c.

Si $\lambda=3$, ou $Q=x^3+Acx^2+Ac^2x+c^3$, on aura $R=x+c$, & le produit de $x+c$ par $xx+kcx+cc$, ou $x^3+kcx^2+ccx+cx^2+kccx+c^3$ Comparé avec Q, ou $x^3+Acx^2+Ac^2x+c^3$ donnera l'equation $(kc+c)x^2=Acx^2$, ou $k+1=A$, d'ou l'on tire $k=A-1$, & le faĉteur $xx+kcx+cc=xx+cx(A-1)+cc$.

Si $\lambda=4$, ou $Q=x^4+Acx^3+Bc^2x^2+Ac^3x+c^4$, on aura $R=x^2+mcx+cc$, & le produit de $x^2+mcx+cc$ par $x^2+kcx+cc$ comparé avec Q, ou $x^4+Acx^3+Bc^2x^2+Ac^3x+c^4$ donnera deux equations, la premiere $m+k=A$, & la ſeconde $1+km+1=B$, aulieu de la ſeconde equation generale $n+km+1=B$; par ce que dans ce cas n devient $=1$; Car ſi on compare terme a terme la formule generale $x^{\lambda-2}+mcx^{\lambda-3}+nc^2x^{\lambda-4}+pc^3x^{\lambda-5}+$&c. avec le faĉteur $x^2+mcx+cc$, on trouve $n=1$.

Si $\lambda=5$, ou $Q=x^5+Acx^4+Bc^2x^3+Bc^3x^2+Ac^4x+c^5$, on aura $R=x^3+mcx^2+mc^2x+c^3$, & deux equations, la premiere $m+k=A$, la ſeconde $m+km+1=B$; par ce que dans ce cas ſi on compare la for-

mule generale $x^{\lambda-2}+mcx^{\lambda-3}+nc^2x^{\lambda-4}+$ &c. avec le facteur $x^3+mcx^2+mc^2x+c^3$ on trouve $n=m$.

Si $\lambda=6$, ou $Q=x^6+Acx^5+Bc^2x^4+Cc^3x^3+Bc^4x^2+Ac^5x+c^6$, on aura $R=x^4+mcx^3+nc^2x^2+mc^3x+c^4$, & trois equations, la premiere $m+k=A$, la seconde $n+km+1=B$ & la troisieme $m+kn+m=C$, aulieu de la troisieme equation generale $p+kn+m=C$; par ce qu'en comparant la formule generale $x^{\lambda-2}+mcx^{\lambda-3}+nc^2x^{\lambda-4}+pc^3x^{\lambda-5}+$ &c. avec le facteur $x^4+mcx^3+nc^2x^2+mc^3x+c^4$, on trouve $p=m$.

On voit par ces exemples qu'on peut dans tous les cas determiner la derniere equation generale des coefficients numeriques, en comparant terme par terme la formule generale $x^{\lambda-2}+mcx^{\lambda-3}+nc^2x^{\lambda-4}+pc^3x^{\lambda-5}+qc^4x^{\lambda-6}+rc^5x^{\lambda-7}+$ &c. avec le facteur R qu'on aura trouvé dans chaque cas. Il peut neantmoins arriver qu'on ne puisse trouver par ces equations aucune valeur réelle de k comme dans la supposition de $\lambda=4$; l'on a les equations $m+k=A$, & $2+km=B$; d'ou l'on tire $m=A-k$, & $2+Ak-kk=B$, ou $kk-Ak=2-B$; Ce qui donne $k=\frac{1}{2}A\pm\sqrt{2+\frac{1}{4}AA-B}$, valeur imaginaire, lorsque B surpasse la quantité $2+\frac{1}{4}AA$. Alors il faut avoir recours a d'autres facteurs;

ﬅeurs; par exemple, au lieu des facteurs $xx + kcx + cc$, & $xx + mcx + cc$, prendre $xx + kcx + bcc$, & $xx + mcx + \frac{cc}{b}$.

CLIII.

Nous allons appliquer la ſeconde methode a quelques exemples.

EXEMPLE I. Soit propoſé le binome $x^5 + c^5$, on le comparera avec le polynome reciproque Q, ou $x^\lambda + Acx^{\lambda-1} + Bc^2x^{\lambda-2} \ldots\ldots\ldots + Bc^{\lambda-2}x^2 + Ac^{\lambda-1}x + c^\lambda$, & on aura $\lambda = 5$, $A = o$, $B = o$, $R = x^3 + mcx^2 + mc^2x + c^3$, & les deux equations $m + k = o$, $m + km + 1 = o$; d'ou l'on tire $m = -k$; $kk + k = 1$, & $k = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$; par conſequent on a pour $xx + kcx + cc$ deux facteurs réels, $xx + \frac{cx(\sqrt{5}-1)}{2} + cc$, & $xx - \frac{cx(\sqrt{5}-1)}{2} + cc$; le troiſieme facteur ſimple ſera $x + c$, qu'on trouve en faiſant $x^5 + c^5 = o$.

EXEMPLE II. On propoſe le binome $x^5 - c^5$. En faiſant $x^5 - c^5 = o$ on trouve un facteur ſimple $x - c = o$, & diviſant $x^5 - c^5$ par ce facteur on a pour quotient le polynome reciproque $x^4 + cx^3 + c^2x^2 + c^3x + c^4$, qu'on comparera avec Q comme dans

l'exemple precedent, & on aura $\lambda=4$, $A=1$, $B=1$; $R=xx+mcx+cc$ & les deux equations $m+k=1$, & $1+km+1=1$, ou $km+1=o$; d'ou l'on tire $m=1-k$; $km=k-kk$; & $km+1=o=k-kk+1$, ou $kk-k=1$; par consequent $k=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$, & pour $xx+kcx+cc$ les deux facteurs réels $xx+\frac{cx(\sqrt{5}+1)}{2}+cc$, & $xx+\frac{cx(1-\sqrt{5})}{2}+cc$.

EXEMPLE III. On propose le binome x^6+c^6. On aura $\lambda=6$; $A=o$, $B=o$, $C=o$, & les trois equations $m+k=o$, $n+km+1=o$, $m+kn+m=o$, ou $2m+kn=o$; ce qui donne $m=-k$; $n=kk-1$, & $-2k+k^3-k=o=k^3-3k$; d'ou l'on tire $k=o$, & $k=\pm\sqrt{3}$; donc on aura pour $xx+kcx+cc$ les trois facteurs $xx+cc$, $xx+cx\sqrt{3}+cc$, $xx-cx\sqrt{3}+cc$.

EXEMPLE IV. On propose le binome x^7+c^7, en le comparant avec Q, on trouve $\lambda=7$, $A=o$, $B=o$, $C=o$; $R=x^5+mcx^4+nc^2x^3+nc^3x^2+mc^4x+c^5$, & les trois equations $m+k=o$, $n+km+1=o$, & $n+kn+m=o$; d'ou l'on tire $k^3+kk-2k+1=o$, equation dont toutes les racines sont réelles, & qu'on trouve par les Tables des Sinus.

EXEMPLE V. Si on propose le trinome recipro-

que $x^4 + 2Hccx^2 + c^4$, on aura $\lambda = 4$, $A = o$, $B = 2H$; $R = xx + mcx + cc$, & les deux equations $m + k = o$, & $2 + km = 2H$; ce qui donne $k = \pm \sqrt{2 - 2H}$, valeurs réelles, lorſque H n'eſt pas plus grand que l'unité, & imaginaires lorſque $H > 1$; mais dans ce cas l'equation $x^4 + 2Hccx^2 + c^4 = o$ donne $x^2 = - Hc^2 \pm c^2 \sqrt{H^2 - 1}$, valeurs réelles & les deux facteurs ſont $xx + Hc^2 + c^2 \sqrt{H^2 - 1}$, & $xx + Hc^2 - c^2 \sqrt{H - 1}$.

CLIV.

TROISIEME METHODE. Suppoſant que le polynome ou l'equation $Q = o$ contienne des racines imaginaires, on prend pour un de ſes facteurs réels l'equation $xx - 2ax + aa + bb = o$, dont les deux racines imaginaires ſont $x = a + b\sqrt{-1}$, & $x = a - b\sqrt{-1}$. on ſubſtitue l'une de ces deux racines, par exemple, $a + b\sqrt{-1}$ au lieu de x, & les puiſſances de cette racine au lieu des puiſſances de x dans le polynome $Q = o$; par ces ſubſtitutions on change Q en un autre polynome compoſé de deux parties, dont l'une eſt toute réelle, & l'autre eſt multipliée par $\sqrt{-1}$; & comme en ſubſtituant dans une equation quelconque la valeur de l'inconnüe, tous les termes ſe detruiſent mutuelle-

ment, on egalera a zero chacune des deux parties du polynome Q après la substitution de $a+b\sqrt{-1}$ au lieu de x, & en divisant par $\sqrt{-1}$ la partie qui est multipliée par $\sqrt{-1}$, on aura deux equations toutes réelles qui ne contiendront que les deux inconnües a, & b. On trouvera donc par la comparaison de ces deux equations les valeurs réelles de a & de b, qu'on substituera dans le trinome $xx - 2ax + aa + bb$, pour avoir les facteurs réels du polynome Q.

CLV.

Il est bon pour l'usage de cette Methode d'avoir une Table des puissances du binome $a+b\sqrt{-1}$ separée en deux parties, l'une toute réelle, & l'autre multipliée par $\sqrt{-1}$. Or en faisant $p=\sqrt{-1}$, $pp=-1$, $p^3=-\sqrt{-1}$, $p^4=1$, $p^5=\sqrt{-1}$, $p^6=-1$, &c. on aura $a+b\sqrt{-1}=a+bp$, & par la formule generale du binome de Newton $x^n = (a+bp)^n = a^n + na^{n-1}bp + \frac{n.\overline{n-1}}{2}a^{n-2}b^2p^2 + \frac{n.\overline{n-1}.\overline{n-2}}{2.\ 3}a^{n-3}b^3p^3 + \frac{n.\overline{n-1}.\overline{n-2}.\overline{n-3}}{2.\ 3.\ 4}a^{n-4}b^4p^4 +$ &c. la partie réelle de x^n sera $a^n - \frac{n.\overline{n-1}}{2}a^{n-2}b^2 +$

$\frac{n.\ n-1.\ n-2.\ n-3}{2.\quad 3.\quad 4} a^{n-4} b^4 - \frac{n.\ n-1.\ n-2.\ n-3.\ n-4.\ n-5}{2.\quad 3.\quad 4.\quad 5.\quad 6} a^{n-6} b^6 +$ &c. la partie imaginaire sera $n a^{n-1} b \sqrt{-1} - \frac{n.\ n-1.\ n-2}{2.\quad 3}$ $a^{n-3} b^3 \sqrt{-1} + \frac{n.\ n-1.\ n-2.\ n-3.\ n-4}{2.\quad 3.\quad 4.\quad 5} a^{n-5} b^5 \sqrt{-1} -$ &c., d'ou l'on tire la Table suivante en supposant $m = aa - bb$, ou $bb = aa - m$.

$$x = a + b\sqrt{-1}$$

$$x^2 = m + 2ab\sqrt{-1}$$

$$x^3 = 3am - 2a^3 + mb\sqrt{-1}$$
$$+ 2a^2 b\sqrt{-1}$$

$$x^4 = m^2 + 4a^2 m - 4a^4 + 4amb\sqrt{-1}$$

$$x^5 = 5am^2 - 4a^5 + m^2 b\sqrt{-1}$$
$$+ 8a^2 mb\sqrt{-1}$$
$$- 4a^4 b\sqrt{-1}$$

$$x^6 = m^3 + 12a^2m^2 - 12a^4 m + 6am^2 b\sqrt{-1}$$
$$+ 8a^3 mb\sqrt{-1}$$
$$- 8a^5 b\sqrt{-1}$$

&c.

CLVI.

EXEMPLE. On veut trouver les deux facteurs réels doubles de l'equation generale du quatrieme degré. Nous avons demontré que, si le dernier terme de cette equation est negatif, elle aura au moins deux racines réelles, qu'on pourra trouver par les methodes ordinaires; & en divisant l'equation par le produit des deux facteurs simples que donnent ces deux racines, on aura pour quotient l'autre facteur réel double. Il ne nous reste donc qu'a chercher les deux facteurs réels doubles, lorsque le dernier terme de l'equation du quatrieme degrè est positif. Alors, en faisant evanouïr le second terme de cette equation, on pourra toujours la reduire a cette forme $x^4+Bc^2x^2+Cc^3x+c^4=o$, & on aura suivant la Table.

$$x^4=m^2+4a^2m-4a^4+4amb\sqrt{-1}$$
$$Bc^2x^2=Bc^2m \qquad +2Bc^2ab\sqrt{-1}$$
$$Cc^3x=Cc^3a \qquad +Cc^3b\sqrt{-1}$$
$$c^4=c^4$$

on a donc les deux equations $m^2+4a^2m+Bc^2m-4a^4+Cc^3a+c^4=o$, & $4amb\sqrt{-1}+2Bc^2ab\sqrt{-1}+Cc^3b\sqrt{-1}=o$, ou, en divisant par $b\sqrt{-1}$, $4am+$

$2Bc^3a + Cc^3 = o$, d'ou l'on tire $m = \frac{-2Bc^2a - Cc^3}{4a}$; & en substituant cette valeur de m dans la premiere equation, on trouve $64a^6 + 32Bc^2a^4 + (4BB - 16)c^4aa - C^2c^6 = o$, equation d'un degré pair dont le dernier terme est negatif, par laquelle on trouvera deux valeurs réelles de a. On aura ensuite la valeur réelle de m par l'equation $m = \frac{-c^2(2Ba + Cc)}{4a}$ d'ou l'on deduira la valeur de bb par l'equation $bb = aa - m$; Substituant ces valeurs réelles au lieu de a & de bb dans le trinome $xx - 2ax + aa + bb$, on aura deux facteurs réels doubles du polynome $x^4 + Bc^2x^2 + Cc^3x + c^4$.

Si on suppose que le dernier terme de l'equation du quatrieme degré soit negatif, ou $-c^4$, en se servant de la même methode on trouvera pour la premiere equation $m^3 + 4a^2m + Bc^2m - 4a^4 + Cc^3a - c^4 = o$; la seconde equation sera la même, & on aura pour resultat l'equation $64a^6 + 32Bc^2a^4 + (4BB + 16)c^4aa - C^2c^6 = o$. On peut encore remarquer que ce resultat $64a^6 + 32Bc^2a^4 + (4BB + 16)c^4aa - C^2c^6 = o$, en faisant $aa = z$, devient une equation du troisieme degré.

CLVII.

QUATRIEME METHODE. On prend pour un des facteurs réels de Q l'equation $xx - 2ax.$ Cos. $N + aa = o$, dont les deux racines imaginaires (Art. CXLV.) Sont $x = a$(Cos. $N +$ Sin. $N\sqrt{-1}$) & $x = a$(Cos. $N -$ Sin. $N\sqrt{-1}$). On substitue dans Q l'une des deux racines au lieu de x comme dans la methode precedente, & l'on reduit par cette substitution le polynome Q a deux parties, l'une toute réelle qu'on egale a zero, & l'autre multipliée par $\sqrt{-1}$, qu'on egale aussi a zero, aprés l'avoir divisée par $\sqrt{-1}$, & par la comparaison des deux equations on determine les valeurs réelles de a, de Cos. N, & de Sin. N; car comme $\overline{\text{Sin.}N}^2 + \overline{\text{Cos.}N}^2 = 1$, lorsqu'on aura la valeur réelle de Cos. N, on aura aussi celle de Sin. N, & reciproquement. Pour les puissances de x exprimées par celles de a. Cos. $N \pm a$. Sin. $N\sqrt{-1}$, on les trouve facilement & trés simplement, puisque (Art. LXXV.)

On a toujours $x^n = a^n$. Cos. $nN \pm a^n$. Sin. $nN\sqrt{-1}$;

$$\text{Par consequent } \begin{cases} x^2 = a^2.\text{Cos. } 2N \pm a^2.\text{Sin. } 2N\sqrt{-1} \\ x^3 = a^3.\text{Cos. } 3N \pm a^3.\text{Sin. } 3N\sqrt{-1} \\ x^4 = a^4.\text{Cos. } 4N \pm a^4.\text{Sin. } 4N\sqrt{-1} \end{cases}$$

& ainsi des autres puissances.

Lorf-

CLVIII.

Lorsque le polynome Q eſt reciproque, & qu'il a la forme $x^\lambda + Acx^{\lambda-1} + Bc^2x^{\lambda-2} \ldots\ldots + Bc^{\lambda-2}x^2 + Ac^{\lambda-1}x + c^\lambda = o$ on peut prendre avec avantage pour l'un de ſes facteurs réels le trinome $xx - 2cx.\text{Cos.}N + cc = o$, dont les racines ſont $x = c.\text{Cos.}N \pm c.\text{Sin.}N\sqrt{-1}$, & la puiſſance quelconque $x^n = c^n.\text{Cos.}nN \pm c^n.\text{Sin.}nN\sqrt{-1}$. Nous donnerons l'application de cette methode dans les problemes ſuivants.

CLIX.

PROBLEME. Trouver les facteurs réels doubles du binome general $x^\lambda \pm c^\lambda$.

Nous reſoudrons les deux cas de ce Probleme par la ſeconde & la quatrieme Methode.

PREMIER CAS. $x^\lambda + c^\lambda$

SOLUTION PAR LA SECONDE METHODE. Suppoſant $x^\lambda + c^\lambda = o$, & comparant ce binome avec le polynome reciproque general $x^\lambda + Acx^{\lambda-1} + Bc^2x^{\lambda-2} \ldots\ldots + Bc^{\lambda-2}x^2 + Ac^{\lambda-1}x + c^\lambda = o$, on trouve $A = o, B = o, C = o, D = o$, &c. & en prenant pour un des facteurs le trinome reciproque $xx + kcx + cc$, & pour l'autre

Ee

facteur le polynome reciproque $R=x^{\lambda-2}+mcx^{\lambda-3}+nc^2x^{\lambda-4}+pc^3x^{\lambda-5}\ldots\ldots\ldots\ldots+pc^{\lambda-5}x^3+nc^{\lambda-4}x^2+mc^{\lambda-3}x+c^{\lambda-2}=o$ on aura les equations generales $m+k=o$, $n+km+1=o$, $p+kn+m=o$, $q+kp+n=o$, &c., par lesquelles on trouvera les valeurs réelles de k (Art. CLII.).

Si $\lambda=3$, on aura $k=-1$.

Si $\lambda=4$, on aura $k=\pm\sqrt{2}$, a cause des deux equations $m+k=o$, $2+km=o$.

Si $\lambda=5$, on aura $m+k=o$, $m+km+1=o$, & $k=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$.

Si $\lambda=6$, on aura $m+k=o$, $n+km+1=o$, $2m+kn=o$, d'ou l'on tire $k^3-3k=o$; $k=o$, & $k=\pm\sqrt{3}$.

Si $\lambda=7$, on aura $m+k=o$; $n+km+1=o$; $n+kn+m=o$, d'ou l'on tire l'equation du troisieme degré $k^3+kk-2k+1=o$, par laquelle on trouve trois valeurs réelles de k, & qu'on peut resoudre par les Tables des Sinus.

Si $\lambda=8$, on aura $m+k=o$, $n+km+1=o$; $p+kn+m=o$, & $2n+kp=o$; d'ou l'on tire $k^4-4kk+2=o$; $kk-2=\pm\sqrt{2}$ & $k=\pm\sqrt{2\pm\sqrt{2}}$.

CLX.

Lors qu'on a trouvé les facteurs réels du binome $x^{\lambda} \pm c^{\lambda}$, on trouve aisément ceux du binome $x^{\mu\lambda} \pm c^{\mu\lambda}$, dans lequel l'exposant $\mu\lambda$ est multiple du premier exposant λ. Car en faisant $x^{\mu} = z$ & $c^{\mu} = b$, on aura $x^{\mu\lambda} = z^{\lambda}$, & $c^{\mu\lambda} = b^{\lambda}$; par consequent $x^{\mu\lambda} \pm c^{\mu\lambda} = z^{\lambda} \pm b^{\lambda}$, de la forme du premier binome $x^{\lambda} \pm c^{\lambda}$.

Par exemple, lorsqu'on a trouvé les facteurs réels $x + c$, & $xx - cx + cc$ du binome $x^3 + c^3$, on trouve ceux de $x^6 + c^6$, en faisant $x^2 = z$, & $c^2 = b$; ce qui rend $x^6 + c^6 = z^3 + b^3$, dont les facteurs sont $z + b = xx + cc$, & $zz - bz + bb = x^4 - c^2 x^2 + c^4$, dont on trouve les deux facteurs par les exemples precedents $xx + cx\sqrt{3} + cc$, & $xx - cx\sqrt{3} + cc$. on trouvera de même les facteurs du binome $x^9 + c^9 = z^3 + b^3$, dont les facteurs sont $z + b = x^3 + c^3$, & $zz - bz + bb = x^6 - c^3 x^3 + c^6$. on cherche les facteurs de ce trinome reciproque par la seconde methode qui donne les equations $m + k = 0, n + km + 1 = 0,\ 2m + kn = -1$; d'ou l'on tire l'equation $k^3 - 3k + 1 = 0$, qu'on peut resoudre par les Tables des Sinus.

TABLE

CONSTRUITE PAR LA SECONDE METHODE.

BINOMES.	FACTEURS.
$x^3 + c^3 \cdots$	$x + c$ $xx - cx + cc$
$x^4 + c^4 \cdots$	$xx + cx\sqrt{2} + cc$ $xx - cx\sqrt{2} + cc$
$x^5 + c^5 \cdots$	$x + c$ $xx + cx\frac{\sqrt{5} - 1}{2} + cc$ $xx - cx\frac{\sqrt{5} + 1}{2} + cc$
$x^6 + c^6 \cdots$	$xx + cc$ $xx + cx\sqrt{3} + cc$ $xx - cx\sqrt{3} + cc$
$x^7 + c^7 \cdots$	$x + c$ $xx + kcx + cc$ & $k^3 + k^2 - 2k - 1 = 0$
$x^8 + c^8 \cdots$	$xx + cx\sqrt{2 - \sqrt{2}} + cc$ $xx - cx\sqrt{2 - \sqrt{2}} + cc$ $xx + cx\sqrt{2 + \sqrt{2}} + cc$ $xx - cx\sqrt{2 + \sqrt{2}} + cc$

BINOMES.	FACTEURS.
x^9+c^9 …	$x+c$ $xx-cx+cc$ $xx+kcx+cc$ & $k^3-3k+1=0$
$x^{10}+c^{10}$.	$xx+cc$ $xx+cx\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}+cc$ $xx-cx\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}+cc$ $xx+cx\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}+cc$ $xx-cx\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}+cc$

CLXI.

SOLUTION DU PREMIER CAS PAR LA QUATRIEME METHODE. On ſuppoſera $x=c.\text{Cos.}N+c.\text{Sin.}N\sqrt{-1}$; par conſequent $x^\lambda=c^\lambda.\ \text{Cos.}\lambda N+c^\lambda.\text{Sin.}\lambda N.\sqrt{-1}$, qu'ou ſubſtituera au lieu de x^λ dans le binome propoſé $x^\lambda+c^\lambda$, ce qui donnera les deux equations $c^\lambda.\ \text{Cos.}\lambda N+c^\lambda=0$, & $c^\lambda.\ \text{Sin.}\lambda N.\sqrt{-1}=0$, ou $\text{Cos.}\lambda N=-1$ pour la premiere equation, & $\text{Sin.}\lambda N=0$ pour la ſeconde, qui ſuit neceſſairement de la premiere; puiſque, ſi le

Cosinus d'un angle quelconque est -1, son Sinus sera necessairement $=o$. or, si l'on prend π pour le demi-cercle, ou pour l'arc de 180°, & M pour un nombre entier positif quelconque, on aura toujours $\text{Cos.}(2M+1)\pi = -1$. Donc $\text{Cos.}\,\lambda N = \text{Cos.}(2M+1)\pi$, par consequent l'arc $\lambda N = (2M+1)\pi$, & l'arc $N = \frac{(2M+1)\pi}{\lambda}$. Si donc on substitue cette valeur de N dans le Trinome $xx - 2cx.\ \text{Cos.}N + cc$, on aura le trinome $xx - 2cx.\text{Cos.}\frac{2M+1}{\lambda}\pi + cc$ pour la formule generale des facteurs doubles $x^{\lambda} + c^{\lambda}$; & pour trouver ces differens facteurs, on n'aura qu'à substituer dans la fraction $\frac{2M+1}{\lambda}\pi$ tous les nombres impairs pas plus grands que λ, au lieu de $2M+1$. On pourroit bien en substituer de plus grands que λ, mais cela feroit inutile, par ce qu'on retrouveroit le même facteur qu'auparavant. Il faut encore remarquer que, si l'exposant λ est un nombre impair, en supposant $2M+1=\lambda$ on aura $\text{Cos.}\frac{2M+1}{\lambda}\pi = \text{Cos.}\pi = -1$, & alors le trinome $xx - 2cx.\ \text{Cos.}\frac{2M+1}{\lambda}\pi + cc$ sera le quarré $xx + 2cx + cc$ dont la racine est $x+c$ facteur simple du binome $x^{\lambda} + c^{\lambda}$.

TABLE
CONSTRUITE PAR LA QUATRIEME METHODE.

BINOMES.	FACTEURS.
$x^3 + c^3 \ldots$	$x + c$
	$xx - 2cx.\ \text{Cos.}\ \frac{1}{3}\pi + cc$
$x^4 + c^4 \ldots$	$xx - 2cx.\ \text{Cos.}\ \frac{1}{4}\pi + cc$
	$xx - 2cx.\ \text{Cos.}\ \frac{3}{4}\pi + cc$
$x^5 + c^5 \ldots$	$x + c$
	$xx - 2cx.\ \text{Cos.}\ \frac{1}{5}\pi + cc$
	$xx - 2cx.\ \text{Cos.}\ \frac{3}{5}\pi + cc$
$x^6 + c^6 \ldots$	$xx - 2cx.\ \text{Cos.}\ \frac{1}{6}\pi + cc$
	$xx - 2cx.\ \text{Cos.}\ \frac{3}{6}\pi + cc = xx + cc$
	$xx - 2cx.\ \text{Cos.}\ \frac{5}{6}\pi + cc$
$x^7 + c^7 \ldots$	$x + c$
	$xx - 2cx.\ \text{Cos.}\ \frac{1}{7}\pi + cc$
	$xx - 2cx.\ \text{Cos.}\ \frac{3}{7}\pi + cc$
	$xx - 2cx.\ \text{Cos.}\ \frac{5}{7}\pi + cc$

BINOMES.	FACTEURS.
$x^8 + c^8 \ldots$	$xx - 2cx . \text{Cos.} \frac{1}{8}\pi + cc$
	$xx - 2cx . \text{Cos.} \frac{3}{8}\pi + cc$
	$xx - 2cx . \text{Cos.} \frac{5}{8}\pi + cc$
	$xx - 2cx . \text{Cos.} \frac{7}{8}\pi + cc$
$x^9 + c^9 \ldots$	$x + c$
	$xx - 2cx . \text{Cos.} \frac{1}{9}\pi + cc$
	$xx - 2cx . \text{Cos.} \frac{3}{9}\pi + cc$
	$xx - 2cx . \text{Cos.} \frac{5}{9}\pi + cc$
	$xx - 2cx . \text{Cos.} \frac{7}{9}\pi + cc$
$x^{10} + c^{10} .$	$xx - 2cx . \text{Cos.} \frac{1}{10}\pi + cc$
	$xx - 2cx . \text{Cos.} \frac{3}{10}\pi + cc$
	$xx - 2cx . \text{Cos.} \frac{5}{10}\pi + cc = xx + cc$
	$xx - 2cx . \text{Cos.} \frac{7}{10}\pi + cc$
	$xx - 2cx . \text{Cos.} \frac{9}{10}\pi + cc$

CLXII.

SECOND CAS. $x^\lambda - c^\lambda$

SOLUTION PAR LA SECONDE METHODE. Lorſque l'expoſant λ eſt un nombre pair, nous l'exprimerons par 2μ, & par $2\mu + 1$, lorſqu'il eſt impair.

Le binome $x^{2\mu} - c^{2\mu} = (x^\mu + c^\mu) \times (x^\mu - c^\mu)$. Le premier de ces deux facteurs $x^\mu + c^\mu$ appartient au premier cas $x^\lambda + c^\lambda$; le ſecond facteur $x^\mu - c^\mu$ ſi l'expoſant eſt encore un nombre pair $= 2n$, ſera $x^{2n} - c^{2n} = (x^n + c^n) \times (x^n - c^n)$, & anſi de ſuite; donc il ne reſte plus qu'a reſoudre en facteurs le binome $x^\lambda - c^\lambda$, lorſque l'expoſant λ eſt un nombre impair $2\mu + 1$; or le binome $x^{2\mu+1} - c^{2\mu+1}$ a pour facteur ſimple $x - c$, & en le diviſant par ce facteur, on trouve pour quotient le polynome reciproque $x^{2\mu} + cx^{2\mu-1} + c^2 x^{2\mu-2} \ldots\ldots\ldots + c^{2\mu-2} x^2 + c^{2\mu-1} x + c^{2\mu}$, que nous appellerons T. Il n'eſt donc plus queſtion que de la reſolution de ce polinome reciproque T en ſes facteurs réels. Nous ſuppoſerons pour cela qu'il eſt composé des deux facteurs $xx + kcx + cc$, & $x^{2\mu-2} + mcx^{2\mu-3} + nc^2 x^{2\mu-4} + pc^3 x^{2\mu-5} \ldots\ldots + pc^{2\mu-5} x^3 + nc^{2\mu-4} x^2 + mc^{2\mu-3} x + c^{2\mu-2}$, que nous deſignerons par la lettre R. En

comparant le polynome reciproque T avec le polynome reciproque general $x^{2\mu} + Acx^{2\mu-1} + Bc^2x^{2\mu-2}$, ... $+ Bc^{2\mu-2}x^2 + Ac^{2\mu-1}x + c^{2\mu}$, on trouve $A = 1$, $B = 1$, $C = 1$, & ainsi de suite on aura donc (Art. CLII.) les equations suivantes $m + k = 1$, $n + km + 1 = 1$, ou $n + km = 0$, $p + kn + m = 1$, $q + kp + n = 1$, &c. par les quelles on Trouvera les valeurs réelles de k dans tous les cas particuliers, ou l'exposant $2\mu + 1$ sera determiné.

Si $2\mu + 1 = 3$, on aura $k = 1$, & les facteurs de $x^3 - c^3$ seront $x - c$, & $xx + cx + cc$.

Si $2\mu + 1 = 5$, on aura le facteur $R = x^2 + mcx + cc$ & les equations $m + k = 1$, & $1 + km = c$, au lieu de $n + km = 0$, par ce qu'en comparant $x^2 + mcx + cc$ avec la formule generale $R = x^{2\mu-2} + mcx^{2\mu-3} + nc^2x^{2m-4} +$ &c, on trouve $n = 1$; on tire de ces equations $kk - k = 1$, & $k = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$; ce qui donne les deux facteurs $xx + cx.\frac{1+\sqrt{5}}{2} + cc$, & $xx + cx.\frac{1-\sqrt{5}}{2} + cc$.

Si $2\mu + 1 = 7$, on aura le facteur $R = x^4 + mcx^3 + nc^2x^2 + mc^3x + c^4$, & les equations $m + k = 1$, $n + km = 0$, & $m + kn + m = 1$, au lieu de $p + kn + m = 1$, par ce que dans ce cas $p = m$. de ces trois equations combinées on tire celle-cy $k^3 - kk - 2k + 1 = 0$

Si $2\mu+1=9$, on aura le facteur $R=x^6+mcx^5+ncx^4+pc^3x^3+nc^4x^2+mc^5x+c^6$, & les equations $m+k=1$, $n+km=0$, $p+kn+m=1$, & $n+kp+n=1$, ou $2n+kp=1$; d'ou l'on deduit l'equation $k^4-k^3-3kk+2k+1=0$, qui est divisible par $k-1=0$, & qui a pour quotient $k^3-3k-1=0$; on aura donc pour un des facteurs doubles le trinome $xx+cx+cc$, & on determinera les trois autres facteurs par les trois racines réelles de l'equation $k^3-3k-1=0$, qu'on peut resoudre par les Tables des Sinus.

TABLE
CONSTRUITE PAR LA SECONDE METHODE.

BINOMES.	FACTEURS.
$x^3-c^3\ldots$	$x-c$
	$xx+cx+cc$
$x^4-c^4\ldots$	$xx+cc$
	$xx-cc=(x+c)\times(x-c)$
$x^5-c^5\ldots$	$x-c$
	$xx+cx\frac{1+\sqrt{5}}{2}+cc$
	$xx-cx\frac{1-\sqrt{5}}{2}+cc$

BINOMES.	FACTEURS.		
$x^6 - c^6 \ldots$	$x^3 + c^3 \ldots$	$x + c$	
		$xx - cx + cc$	
	$x^3 - c^3 \ldots$	$x - c$	
		$xx + cx + cc$	
$x^7 - c^7 \ldots$	$x - c$		
	$xx + kcx + cc$, & $k^3 - kk - 2k + 1 = 0$		
$x^8 - c^8 \ldots$	$x^4 + c^4 \ldots$	$xx + cx\sqrt{2} + cc$	
		$xx - cx\sqrt{2} + cc$	
	$x^4 - c^4 \ldots$	$xx + cc$	
		$xx - cc$	$x + c$
			$x - c$
$x^9 - c^9 \ldots$	$x - c$		
	$xx + cx + cc$		
	$xx + kcx + cc$, & $k^3 - 3k - 1 = 0$		
$x^{10} - c^{10}.$	$x^5 + c^5 \ldots$	$x + c$	
		$xx + cx.\frac{\sqrt{5} - 1}{2} + cc$	
		$xx + cx.\frac{\sqrt{5} + 1}{2} + cc$	
	$x^5 - c^5 \ldots$	$x - c$	
		$xx + cx.\frac{1 + \sqrt{5}}{2} + cc$	
		$xx + cx.\frac{1 - \sqrt{5}}{2} + cc$	

CLXIII.

SOLUTION DU SECOND CAS PAR LA QUATRIEME METHODE. Suppoſant que le trinome indeterminé $xx - 2cx.\ \text{Cos.}\ N + cc$ ſoit un facteur du binome $x^\lambda - c^\lambda$, & que $x = c.\ \text{Cos.}N + c.\ \text{Sin.}N.\sqrt{-1}$, on ſubſtituera dans ce binome $c^\lambda.\ \text{Cos.}\lambda N + c^\lambda.\ \text{Sin.}\ \lambda N\sqrt{-1}$ au lieu de x^λ, & on en deduira les deux equations $c^\lambda.\ \text{Cos.}\ \lambda N - c^\lambda = o$, & $c^\lambda.\ \text{Sin.}\ \lambda N.\sqrt{-1} = o$, ou $\text{Cos.}\ \lambda N = 1$, & $\text{Sin.}\ \lambda N = o$: Cette ſeconde equation eſt une conſequence de la premiere, comme il faut qu'elle le ſoit, puiſqu'on n'a qu'une ſeule inconnue $\text{Cos.}N$ a determiner. Or en prenant $2M$ pour un nombre pair quelconque & π pour la demie circonference du cercle dont le rayon eſt l'unité, on a toujours $\text{Cos.}\ 2M\pi = 1$; donc, puiſque $\text{Cos.}\lambda N = 1$, on aura $\text{Cos.}\lambda N = \text{Cos.}\ 2M\pi$, l'arc $\lambda N = 2M\pi$, & $N = \frac{2M\pi}{\lambda}$; donc en ſubſtituant $\frac{2M\pi}{\lambda}$ au lieu de N dans le trinome $xx - 2cx.\ \text{Cos.}\ N + cc$, on aura la formule generale pour trouver les facteurs réels doubles du binome $x^\lambda - c^\lambda$, en mettant ſucceſſivement dans cette formule tous les nombres pairs pas plus grands que λ au lieu de $2M$; car il eſt inutile de ſubſtituer des nombres pairs plus grands que λ, par ce qu'ils rendent les mêmes Coſinus, que les nombres pairs qui ne ſont pas plus grands que λ.

Il faut remarquer que, si l'on substitue zero au lieu de $2M$ dans la fraction $\frac{2M\pi}{\lambda}$, elle devient zero, & par consequent $\text{Cos.}\frac{2M\pi}{\lambda} = \text{Cos.}\,o = 1$, ce qui change la formule en un quarré $xx - 2cx + cc = o$, dont la racine $x - c$ est un facteur simple du binome $x^\lambda - c^\lambda$, quoique ce quarré n'en soit point un facteur double. De même lorsque λ est un nombre pair, & qu'on substitue λ au lieu de $2M$ dans la formule, on a $\text{Cos.}\ \frac{2M\pi}{\lambda} = \text{Cos.}\,\pi = -1$, ce qui change la formule en un quarré $xx + 2cx + cc = o$, dont la racine $x + c$ est un facteur simple du binome $x^\lambda - c^\lambda$, quoique ce quarré n'en soit pas un facteur double.

TABLE
DES FACTEURS DU BINOME $x^\lambda - c^\lambda$ CONSTRUITE PAR LA QUATRIEME METHODE.

BINOMES.	FACTEURS.
$x^3 - c^3 \ldots$	$x - c$
	$xx - 2cx.\ \text{Cos.}\ \frac{2}{3}\pi + cc$
$x^4 - c^4 \ldots$	$x - c$
	$x + c$
	$xx - 2cx.\ \text{Cos.}\ \frac{2}{4}\pi + cc = xx + cc$

BINOMES.	FACTEURS.
$x^5 - c^5 \ldots$	$x - c$
	$xx - 2cx.\ \mathrm{Cos.}\ \frac{2}{5}\pi + cc$
	$xx - 2cx.\ \mathrm{Cos.}\ \frac{4}{5}\pi + cc$
$x^6 - c^6 \ldots$	$x - c$
	$x + c$
	$xx - 2cx.\ \mathrm{Cos.}\ \frac{2}{6}\pi + cc$
	$xx - 2cx.\ \mathrm{Cos.}\ \frac{4}{6}\pi + cc$
$x^7 - c^7 \ldots$	$x - c$
	$xx - 2cx.\ \mathrm{Cos.}\ \frac{2}{7}\pi + cc$
	$xx - 2cx.\ \mathrm{Cos.}\ \frac{4}{7}\pi + cc$
	$xx - 2cx.\ \mathrm{Cos.}\ \frac{6}{7}\pi + cc$
$x^8 - c^8 \ldots$	$x - c$
	$x + c$
	$xx - 2cx.\ \mathrm{Cos.}\ \frac{2}{8}\pi + cc$
	$xx - 2cx.\ \mathrm{Cos.}\ \frac{4}{8}\pi + cc = xx + cc$
	$xx - 2cx.\ \mathrm{Cos.}\ \frac{6}{8}\pi + cc$

BINOMES.	FACTEURS.
$x^9 - c^9 \ldots$	$x - c$
	$xx - 2cx.\ \mathrm{Cos.}\ \frac{2}{9}\pi + cc$
	$xx - 2cx.\ \mathrm{Cos.}\ \frac{4}{9}\pi + cc$
	$xx - 2cx.\ \mathrm{Cos.}\ \frac{6}{9}\pi + cc$
	$xx - 2cx.\ \mathrm{Cos.}\ \frac{8}{9}\pi + cc$
$x^{10} - c^{10}.$	$x - c$
	$x + c$
	$xx - 2cx.\ \mathrm{Cos.}\ \frac{2}{10}\pi + cc$
	$xx - 2cx.\ \mathrm{Cos.}\ \frac{4}{10}\pi + cc$
	$xx - 2cx.\ \mathrm{Cos.}\ \frac{6}{10}\pi + cc$
	$xx - 2cx.\ \mathrm{Cos.}\ \frac{8}{10}\pi + cc$

CLXIV.

Probleme II. Trouver tous les facteurs réels simples ou doubles du trinome general $x^{2\lambda} - 2bc^{\lambda}x^{\lambda} \pm c^{2\lambda}$, dans lequel b est un nombre positif ou negatif.

Cas I. Lorsque le dernier terme est negatif, ou $- c^{2\lambda}$. On a dans ce cas l'equation $x^{2\lambda} - 2bc^{\lambda}x^{\lambda} =$

$c^{2\lambda}$

$c^{2\lambda}$, qui donne $x^{\lambda} - bc^{\lambda} = \pm\sqrt{bb+1}$, donc le trinome ſe reſout en deux binomes réels $x^{\lambda} - bc^{\lambda} + c^{\lambda}\sqrt{bb+1}$, & $x^{\lambda} - bc^{\lambda} - c^{\lambda}\sqrt{bb+1}$, dont on trouve les facteurs réels par le probleme precedent.

CAS II. Lorſque le dernier terme eſt poſitif, ou $+c^{2\lambda}$. On a dans ce cas l'equation $x^{2\lambda} - 2bc^{\lambda}x^{\lambda} = -c^{2\lambda}$, qui donne $x^{\lambda} - bc^{\lambda} = \pm c^{\lambda}\sqrt{bb-1}$, quantité réelle, lorſque b n'eſt pas plus petit que l'unité, & dans ce cas, comme dans le premier, le trinome ſe reſout en deux binomes réels $x^{\lambda} - bc^{\lambda} + c^{\lambda}\sqrt{bb-1}$ & $x^{\lambda} - bc^{\lambda} - c^{\lambda}\sqrt{bb-1}$, dont on trouve les facteurs par le probleme precedent.

CAS III. Lors que dans le ſecond cas le nombre b eſt plus petit que l'unité. La quantité $\sqrt{bb-1}$ devient en ce cas imaginaire & il faut avoir recours a d'autres methodes pour trouver les facteurs réels qu'on cherche.

CLXV.

SOLUTION DU CAS III. PAR LA SECONDE METHODE GENERALE. On ſuppoſera que le trinome reciproque $x^{2\lambda} - 2bc^{\lambda}x^{\lambda} + c^{2\lambda}$ eſt le produit du trinome reciproque $xx + kcx + cc$ multiplié par le polynome reciproque R, ou $x^{2\lambda-2} + mcx^{2\lambda-3} + nc^{2}x^{2\lambda-4} + pc^{3}x^{2\lambda-5} \ldots\ldots\ldots + pc^{2\lambda-5}x^{3} + nc^{2\lambda-4}x^{2} + mc^{2\lambda-3}x + c^{2\lambda-2}$;

& que tous les termes de ce produit sont egaux aux termes correspondans du trinome $x^{2\lambda} - 2bc^{\lambda}x^{\lambda} + c^{2\lambda}$, par ou l'on aura les equations $m + k = o$, $n + km + 1 = o$, $p + kn + m = o$, &c. jusqu'a ce qu'on soit arrivé a l'equation qu'on tire du terme mitoyen $- 2bc^{\lambda}x^{\lambda}$. On trouvera par la comparaison de ces equations les valeurs réelles de k, qu'on substituera dans le binome $xx + kcx + cc$, pour avoir les facteurs réels du binome proposé.

EXEMPLE I. Pour resoudre le trinome $x^4 - 2bc^2x^2 + c^4$, On supposera que ses deux facteurs sont $xx + kcx + cc$, & $xx + mcx + cc$, dont le produit comparé avec le trinome proposé donnera deux equations $m + k = o$, & $2 + km = - 2b$. On tire de ces equations $m = - k$, & $2 - kk = - 2b$, ou $kk = 2 + 2b$ & $k = \pm \sqrt{2 + 2b}$; Donc les deux facteurs seront $xx + cx\sqrt{2 + 2b} + cc$, & $xx - cx\sqrt{2 + 2b} + cc$.

EXEMPLE II. Pour le trinome $x^6 - 2bc^3x^3 + c^6$ on supposera que ses facteurs sont $xx + kcx + cc$, & $x^4 + mcx^3 + nc^2x^2 + mc^3x + c^4$; leur produit comparé avec le trinome proposé donnera les equations $m + k = o$, $n + km + 1 = o$, & $2m + kn = - 2b$; d'ou l'on deduit $m = - k$, $n = kk - 1$, & $k^3 - 3k + 2b = o$, equation du troisieme degré, par laquelle on trouve trois valeurs réelles de k, & qu'on peut resoudre par les Tables des Sinus.

EXEMPLE III. Pour le trinome $x^8 - 2bc^4x^4 + c^8$, en ſuppoſant $x^2 = z$, & $c^2 = b$, on en fait le trinome $z^4 - 2bb^2z^2 + b^4$, dont les facteurs ſont $zz + bz\sqrt{2+2b} + bb$, & $zz - bz\sqrt{2+2b} + bb$, ou $x^4 + c^2x^2\sqrt{2+2b} + c^4$, & $x^4 - c^2x^2\sqrt{2+2b} + c^4$. on reſout le premier de ces trinomes, comme dans l'exemple premier, par les equations $m + k = o$, & $2 + km = \sqrt{2+2b}$, d'ou l'on deduit $m = -k$, $kk = 2 - \sqrt{2+2b}$, & $k = \pm\sqrt{2 - \sqrt{2+2b}}$. Le ſecond trinome ſe reſout par les equations $m + k = o$, & $2 + km = -\sqrt{2+2b}$, d'ou l'on deduit $kk = 2 + \sqrt{2+2b}$, & $k = \pm\sqrt{2 + \sqrt{2+2b}}$.

EXEMPLE IV. Pour le trinome $x^{10} - 2bc^5x^5 + c^{10}$, on prendra les deux facteurs $xx + kcx + cc$, & $x^8 + mcx^7 + nc^2x^6 + pc^3x^5 + qc^4x^4 + pc^5x^3 + nc^6x^2 + mc^7x + c^8$, dont le produit comparé donnera les equations $m + k = o$, $n + km + 1 = o$, $p + kn + m = o$, $q + kp + n = o$, $2p + kq = -2b$, d'ou l'on tire $m = -k$, $n = kk - 1$, $p = -k^3 + 2k$, $q = k^4 - 3kk + 1$ & $k^5 - 5k^3 + 5k + 2b = o$, equation du cinquieme degré qui donnera cinq valeurs réelles de k, & qu'on peut reſoudre par les Tables des Sinus.

TABLE
DES FACTEURS RÉELS
DU TRINOME GENERAL $x^{2\lambda} - 2bc^{\lambda}x^{\lambda} \pm c^{2\lambda}$
PAR LA SECONDE METHODE.

	TRINOMES.	FACTEURS.
CAS I.	$x^{2\lambda} - 2bc^{\lambda}x^{\lambda} - c^{2\lambda}$	$x^{\lambda} - bc^{\lambda} + c^{\lambda}\sqrt{bb+1}$
		$x^{\lambda} - bc^{\lambda} - c^{\lambda}\sqrt{bb+1}$
CAS II. b n'etant pas plus petit que l'unité.	$x^{2\lambda} - 2bc^{\lambda}x^{\lambda} + c^{2\lambda}$	$x^{\lambda} - bc^{\lambda} + c^{\lambda}\sqrt{bb-1}$
		$x^{\lambda} - bc^{\lambda} - c^{\lambda}\sqrt{bb-1}$
CAS III. b etant plus petit que l'unité.	$x^4 - 2bc^2x^2 + c^4$..	$xx + cx\sqrt{2+2b} + cc$
		$xx - cx\sqrt{2+2b} + cc$
	$x^6 - 2bc^3x^3 + c^6$..	$xx + kcx + cc$...........
		.....& $k^3 - 3k + 2b = o$
	$x^8 - 2bc^4x^4 + c^8$..	$xx + cx\sqrt{2 - \sqrt{2+2b}} + cc$
		$xx - cx\sqrt{2 - \sqrt{2+2b}} + cc$
		$xx + cx\sqrt{2 + \sqrt{2+2b}} + cc$
		$xx - cx\sqrt{2 + \sqrt{2+2b}} + cc$
	$x^{10} - 2bc^5x^5 + c^{10}$	$xx + kcx + cc$...............
		...& $k^5 - 5k^3 + 5k + 2b = o$

CLXVI.

SOLUTION DU TROISIEME CAS PAR LA QUATRIEME METHODE. Puisque dans ce troisieme cas le nombre donné b est plus petit que l'unité, on peut le supposer egal au Cosinus d'un angle donné que nous designerons par H; ainsi le trinome a resoudre sera $x^{2\lambda} - 2c^{\lambda}x^{\lambda}.\text{Cos}.H + c^{2\lambda}$. Or supposant que $xx - 2cx.\text{Cos}.N + cc = o$ soit le facteur double indeterminé qu'on cherche, on aura $x = c.\text{Cos}.N + c.\text{Sin}.N.\sqrt{-1}$; $x^{2\lambda} = c^{2\lambda}.\text{Cos}.2\lambda N + c^{2\lambda}.\text{Sin}.2\lambda N.\sqrt{-1}$; $2c^{\lambda}x^{\lambda}.\text{Cos}.H = 2c^{2\lambda}.\text{Cos}.H.\text{Cos}.\lambda N + 2c^{2\lambda}\text{Cos}.H.\text{Sin}.\lambda N.\sqrt{-1}$, & par la quatrieme methode les deux equations $c^{2\lambda}.\text{Cos}.2\lambda N - 2c^{2\lambda}.\text{Cos}.H.\text{Cos}.\lambda N + c^{2\lambda} = o$; $c^{2\lambda}\text{Sin}.2\lambda N.\sqrt{-1} - 2c^{2\lambda}.\text{Cos}.H.\text{Sin}.\lambda N.\sqrt{-1} = o$, ou $\text{Cos}.2\lambda N - 2.\text{Cos}.H.\text{Cos}.\lambda N = -1$, & $\text{Sin}.2\lambda N = 2.\text{Cos}.H.\text{Sin}.\lambda N$. Mais on a toujours $\text{Cos}.2\lambda N = 2.\overline{\text{Cos}.\lambda N}^2 - 1$; Donc en substituant cette valeur de Cos. $2\lambda N$ dans la premiere equation, on aura $2.\overline{\text{Cos}.\lambda N}^2 - 1 - 2.\text{Cos}.H.\text{Cos}.\lambda N = -1$; par consequent $\text{Cos}.\lambda N = \text{Cos}.H$. on trouve la mesme chose par la seconde equation; car on a toujours $\text{Sin}.2\lambda N = 2.\text{Sin}.\lambda N.\text{Cos}.\lambda N$, & en substituant cette valeur au lieu de Sin. $2\lambda N$ dans la seconde equation, on trouve $2.\text{Sin}.\lambda N.\text{Cos}.\lambda N = 2.\text{Cos}.H.\text{Sin}.\lambda N$ par consequent $\text{Cos}.\lambda N = \text{Cos}.H$; ce qui fait voir que la seconde equation est une suite de la premiere.

Maintenant si on suppose que $2M$ soit un nombre positif quelconque & π la demie circonference d'un cercle dont le rayon est l'unité, on aura toujours Cos. $(2M\pi \pm H) =$ Cos. H, quelque soit l'arc H; donc Cos. $\lambda N =$ Cos. $(2M\pi \pm H)$; par consequent $\lambda N = 2M\pi \pm H$ & $N = \frac{2M\pi \pm H}{\lambda}$; donc, si on substitue $\frac{2M\pi \pm H}{\lambda}$ au lieu de N dans le trinome $xx - 2cx$. Cos. $N + cc$, on aura $xx - 2cx$. Cos. $\left(\frac{2M\pi \pm H}{\lambda}\right) + cc$ pour la formule generale des facteurs réels doubles du trinome proposé $x^{2\lambda} - 2c^{\lambda}x^{\lambda}$. Cos. $H + c^{2\lambda}$; & on trouvera ces differens facteurs en mettant successivement dans la formule tous les nombres pairs pas plus grands que λ au lieu de $2M$; Car il est inutile d'en substituer de plus grands.

EXEMPLE. On veut trouver les deux facteurs réels doubles du trinome $x^4 - 2c^2x^2$. Cos. $H + c^4$. On a $\lambda = 2$, & en substituant d'abord zero au lieu de $2M$ dans la formule generale $xx - 2cx$. Cos. $\left(\frac{2M\pi \pm H}{\lambda}\right) + cc$, elle devient $xx - 2cx$. Cos. $\pm \frac{H}{2} + cc = xx - 2cx$. Cos. $\frac{H}{2} + cc$; par ce que Cos. $\pm \frac{H}{2} =$ Cos. $\frac{H}{2}$; en substituant ensuite 2 au lieu de $2M$, on aura $xx - 2cx$. Cos. $\left(\pi \pm \frac{H}{2}\right) + cc = xx + 2cx$. Cos. $\frac{H}{2} + cc$; par ce que Cos. $\left(\pi \pm \frac{H}{2}\right) = -$ Cos. $\frac{H}{2}$. Il seroit inutile de substituer 4 au lieu de $2M$, car la formule deviendroit $xx - 2cx$. Cos. $\left(2\pi \pm \frac{H}{2}\right) + cc = xx - 2cx$. Cos. $\pm \frac{H}{2} + cc$, comme auparavant.

TABLE

DES FACTEURS DU TRINOME $x^{2\lambda} - 2c^{\lambda}x^{\lambda}.\,\text{Cos}.\,H + c^{2\lambda}$ CONSTRUITE PAR LA QUATRIEME METHODE.

TRINOMES.	FACTEURS.
$x^4 - 2c^2x^2.\text{Cos}.H + c^4$	$xx - 2cx.\text{Cos}.\frac{H}{2} + cc$
	$xx - 2cx.\text{Cos}.\left(\frac{2\pi \pm H}{2}\right) + cc = xx + 2cx.\text{Cos}.\frac{H}{2} + cc$
$x^6 - 2c^3x^3.\text{Cos}.H + c^6$	$xx - 2cx.\text{Cos}.\frac{H}{3} + cc$
	$xx - 2cx.\text{Cos}.\left(\frac{2\pi - H}{3}\right) + cc$
	$xx - 2cx.\text{Cos}.\left(\frac{2\pi + H}{3}\right) + cc$
$x^8 - 2c^4x^4.\text{Cos}.H + c^8$	$xx - 2cx.\text{Cos}.\frac{H}{4} + cc$
	$xx - 2cx.\text{Cos}.\left(\frac{2\pi - H}{4}\right) + cc$
	$xx - 2cx.\text{Cos}.\left(\frac{2\pi + H}{4}\right) + cc$
	$xx - 2cx.\text{Cos}.\left(\frac{4\pi \pm H}{4}\right) + cc = xx + 2cx.\text{Cos}.\frac{H}{4} + cc$
$x^{10} - 2c^5x^5.\text{Cos}.H + c^{10}$	$xx - 2cx.\text{Cos}.\frac{H}{5} + cc$
	$xx - 2cx.\text{Cos}.\left(\frac{2\pi - H}{5}\right) + cc$
	$xx - 2cx.\text{Cos}.\left(\frac{2\pi + H}{5}\right) + cc$
	$xx - 2cx.\text{Cos}.\left(\frac{4\pi - H}{5}\right) + cc$
	$xx - 2cx.\text{Cos}.\left(\frac{4\pi + H}{5}\right) + cc$

CLXVII.

PROBLEME III. Trouver tous les facteurs réels simples ou doubles du quadrinome general $x^{3\lambda} + Ac^{\lambda} x^{2\lambda} + Bc^{2\lambda} x^{\lambda} \pm c^{3\lambda}$.

En faisant $x^{\lambda} = z$, & $c^{\lambda} = b$, on cangera le quadrinome general en une equation du troisieme degré $z^3 + Abz^2 + Bb^2 z \pm b^3$, qui aura toujours au moins une racine réelle, comme $z = \pm a$, qu'on trouvera par les methodes connues; on divisera ensuite cette equation par le facteur $z \mp a = o$, & on aura pour quotient exact un trinome, ou une equation du second degré de la forme $z^2 + A' b z + B' b^2 = o$; on remettra dans ce trinome & dans le binome $z \mp a$ les valeurs de z & de b, & on aura pour facteurs réels du quadrinome proposé le binome $x^{\lambda} \mp a$, & le trinome $x^{2\lambda} + A' c^{\lambda} x^{\lambda} + B' c^{2\lambda}$, qu'on decomposera dans leurs facteurs réels simples ou doubles par les deux problemes precedents.

CLXVIII.

PROBLEME IV. Trouver tous les facteurs réels du quinome general ou du polynome de cinq termes $x^{4\lambda} + Ac^{\lambda} x^{3\lambda} + Bc^{2\lambda} x^{2\lambda} + Cc^{3\lambda} x^{\lambda} \pm c^{4\lambda}$.

On

On ſuppoſera comme dans le probleme precedent $x^{\lambda}=z$, & $c^{\lambda}=b$, & on changera le quinome proposé en une equation du quatrieme degré $z^4+Abz^3+Bb^2z^2+Cb^3z\pm b^4=o$. Lorſque le dernier terme b^4 de cette equation ſera negatif, elle aura au moins deux racines réelles, qu'on trouvera par les methodes connues, & qui donneront deux facteurs réels de cette même equation. On diviſera enſuite toute l' equation par le produit de ces facteurs, & le quotient exact ſera un trinome réel du ſecond degré. On aura donc par la pour facteurs réels de l'equation du quatrieme degré deux binomes ſimples, & un trinome du ſecond degré, & en remettant dans ces facteurs x^{λ} au lieu de z, & c^{λ} au lieu de b, on aura trois facteurs de la forme $x^{\lambda}\pm a$, & $x^{2\lambda}+A'c^{\lambda}x^{\lambda}+B'c^{2\lambda}$, qu'on decompoſera en leurs facteurs réels ſimples ou doubles par les problemes precedents.

Lorſque le dernier terme b^4 de l'equation du quatrieme degré ſera poſitif, on pourra toujours la reſoudre en deux equations du ſecond degré, ou en deux trinomes réels doubles, comme nous l'avons demontré. Enſuite aprés avoir mis x^{λ} au lieu de z, & c^{λ} au lieu de b dans ces deux trinomes, on les decompoſera par le probleme precedent.

CLXIX.

COROLLAIRE. Le ſextinome general, ou le polynome de ſix termes $x^{5\lambda} + Ac^{\lambda}x^{4\lambda} + Bc^{2\lambda}x^{3\lambda} + Cc^{3\lambda}x^{2\lambda} + Dc^{4\lambda}x^{\lambda} \pm c^{5\lambda}$ ſe change, par les ſubſtitutions de z au lieu de x^{λ}, & de b au lieu de c^{λ}, en une equation du cinquieme degré, qui a toujours au moins une racine réelle, qu'on trouvera par les methodes connues de calcul ou de conſtruction. On diviſera enſuite cette equation par le facteur ſimple que donne la racine trouvée, & on la reduira a une equation du quatrieme degré, qu'on decompoſera par le probleme precedent.

CLXX.

PROBLEME V. Trouver tous les facteurs réels ſimples ou doubles du ſeptinome, ou polynome general de ſept termes $x^{6\lambda} + Ac^{\lambda}x^{5\lambda} + Bc^{2\lambda}x^{4\lambda} + Cc^{3\lambda}x^{3\lambda} + Dc^{4\lambda}x^{2\lambda} + Ec^{5\lambda}x^{\lambda} \pm c^{6\lambda}$.

On reduira ce polynome en une equation du ſixieme degré par la ſubſtitution de z au lieu de x^{λ}, & de b au lieu de c^{λ}, on reſoudra enſuite cette equation en facteurs réels ſimples ou doubles, & aprés avoir reſtitué dans ces facteurs x^{λ} au lieu de z, & c^{λ} au lieu de b, on les decompoſera par les problemes precedents.

CAS I. Lorſque le dernier terme de l'equation du ſixieme degré eſt negatif, elle aura au moins deux racines réelles, qu'on trouvera par le calcul, ou par conſtruction. On diviſera enſuite l'equation du ſixieme degré par le produit des deux facteurs que donnent les deux racines trouvées, & le quotient de cette diviſion ſera une equation du quatrieme degré, qu'on reſoudra par le probleme precedent en facteurs réels ſimples ou doubles. Enſuite aprés avoir remis dans ces facteurs x^λ au lieu de z, & c^λ au lieu de b, on les decompoſera par les problemes I. & II.

CAS II. Lorſque le dernier terme de l'equation du ſixieme degré ſera poſitif, on pourra encore la diviſer par un trinome de deux dimenſions. Car que $x^6 + nc^2x^4 + pc^3x^3 + qc^4x^2 + rc^5x + c^6 = o$ ſoit l'equation generale du ſixieme degré, dont on a fait diſparoitre le ſecond terme, & dont le dernier terme eſt poſitif; ayant ſupposé que le trinome indeterminé $xx - 2ax + aa + bb$ eſt le facteur réel de deux dimenſions qu'on cherche, que $x = a + b\sqrt{-1}$, & $m = aa - bb$, on ſubſtituera dans l'equation du ſixieme degré au lieu de x, & de ſes puiſſances le binome $a + b\sqrt{-1}$, & ſes puiſſances, qu'on trouvera par la table de la troiſieme methode, comme on le voit icy

$$\begin{aligned}
x^6 &= m^3 + 12a^2m^2 - 12a^4m + 6am^2b\sqrt{-1} \\
&\qquad + 8a^3mb\sqrt{-1} \\
&\qquad - 8a^5b\sqrt{-1} \\
nc^2x^4 &= nc^2m^2 + 4nc^2a^2m - 4nc^2a^4 + 4nc^2amb\sqrt{-1} \\
pc^3x^3 &= 3pc^3am - 2pc^3a^3 + pc^3mb\sqrt{-1} \\
&\qquad + 2pc^3a^2b\sqrt{-1} \\
qc^4x^2 &= qc^4m \qquad + 2qc^4ab\sqrt{-1} \\
rc^5x &= rc^5a \qquad + rc^5b\sqrt{-1} \\
c^6 &= c^6
\end{aligned}$$

& on aura les deux equations suivantes:

$6am^2 + (8a^3 + 4nc^2a + pc^3)m - 8a^5 + 2pc^3a^2 + 2qc^4a + rc^5 = 0.$

$m^3 + (12a^2 + nc^2)m^2 + (-12a^4 + 4nc^2a^2 + 3pc^3a + qc^4)m - 4nc^2a^4 - 2pc^3a^3 + rc^5a + c^6 = 0.$

En supposant $8a^3 + 4nc^2a + pc^3 = A$; $-8a^5 + 2pc^3a^2 + 2qc^4a + rc^5 = B$; $12a^2 + nc^2 = C$; $-12a^4 + 4nc^2a^2 + 3pc^3a + qc^4 = D$; $-4nc^2a^4 - 2pc^3a^3 + rc^5a + c^6 = E$; les deux equations seront $6am^2 + Am + B = 0$, & $m^3 + Cm^2 + Dm + E = 0$; en les comparant entr'elles on trouve

$$m = \frac{36aaE + AB - 6aBC}{6aAC - AA + 6aB - 36a^2D}$$

& en substituant cette valeur de m dans l'equation $6am^2 + Am + B = o$, & reduisant en même denomination, on trouve

$$6a(36aaE + AB - 6aBC)^2 + A(36aaE + AB - 6aBC) \times (6aAC - AA + 6aB - 36a^2D)$$

$$+ B(6aAC - AA + 6aB - 36a^2D)^2 = o.$$

Il seroit fort long de developper cette equation par la substitution des valeurs respectives de A, B, C, D, E. On peut plus facilement trouver en particulier le terme qu'on voudra; par exemple, le premier terme ou se trouve la plus haute puissance de l'inconnue a; le dernier terme qui n'est point affecté de a; le penultieme terme ou se trouve a; celui qui precede le penultieme, ou se trouve le quarré a^2, & ainsi des autres. Car pour trouver le premier terme, on n'a qu'a conserver dans les valeurs de A, B, C, D, E le terme ou se trouve la plus haute puissance de a, & effaçer tous les autres, c'est a dire, supposér $A = 8a^3$; $B = -8a^5$; $C = 12a^2$; $D = -12a^4$; $E = -4nc^2a^4$; & après avoir mis ces valeurs au lieu de A, B, C, D, E dans l'equation, effaçer les termes, ou la plus haute puissance de A ne se trouve point. On trouvera de cette maniere que le premier terme de l'equation developpée est $-36.8.8.8.8.8.a^{17}$.

On cherchera le dernier terme de l'equation developpée en effaçant dans l'equation non developpée toutes les quantités qui sont multipliées par a, ou par ses puissances; ce qui reduira cette equation a $A.AB.(-AA)+B.(-AA)^2$, ou a $-A^4B+A^4B$, par ou l'on voit que le dernier terme de l'equation developpée est zero. On cherchera le penultieme terme, en effaçant d'abord dans l'equation non developpée les quantités qui sont multipliées par a^2; en supposant ensuite $A=4nc^2a+pc^3$; $B=2qc^4a+rc^5$; $C=nc^2$; $D=3pc^3a+qc^4$; $E=rc^5a+c^6$, & après avoir substitué ces valeurs dans l'equation non developpée, on effaçera tous les termes ou se trouvent a^2, a^3, a^4, &c. & ceux ou a ne se trouve point, il ne doit rester après cela que le penultieme terme, qu'on trouve encore egale a zero. Si l'on cherche de la même maniere les termes ou se trouve a^2, ou celui qui precede le penultieme, on trouvera qu'il n'est point zero.

Ainsi l'equation developpée, qui etoit du dixseptieme degré, & dans laquelle les deux derniers termes s'evanouïssent, se reduira, en la divisant par a^2, a une equation du quinzieme degré, qui aura au moins une racine réelle, qu'on pourra trouver au moins par construction, & par laquelle on trouvera la valeur réelle de m, au moyen de l'equation

$$m = \frac{36aaE + AB - 6aBC}{6aAC - AA + 6aB - 36a^2D};$$

& puis celle de bb par l'equation $bb = aa - m$. Donc en ſubſtituant ces valeurs réelles au lieu de a, & de bb dans le trinome $xx - 2ax + aa + bb$, on aura un facteur réel double de l'equation du ſixieme degré, qu'on reduira par la diviſion a un quotient du quatrieme degré, & on reſoudra ce quotient en facteurs réels par le probleme precedent; ce qui donnera la decompoſition du polynome general de ſept termes.

CLXXI.

REMARQUE. On voit par les Problemes que nous venons de reſoudre qu'on peut toujours reduire les polynomes generaux a des equations, dans leſquelles la plus haute puiſſance de l'inconnue a pour expoſant le nombre des termes du polynome moins l'unité, & que la decompoſition de ces equations donne celle des polynomes generaux. On ſait encore que les equations de dimenſion impaire ayant au moins une racine réelle qu'on peut trouver par le calcul, ou au moins par conſtruction, peuvent ſe reduire par la diviſion a des equations de dimenſion paire, & qu'ainſi tous les problemes ſe reduiſent a la decompoſition des equations de dimenſion paire. C'eſt de la poſſibilité d'une telle decompoſition, que depend cette belle propoſition qu'on ſuppoſe

communement dans le calcul intégral, par laquelle on assure, que l'intégrale d'une telle formule différentielle $\frac{Pdx}{Q}$, ou P & Q expriment des fonctions rationelles quelconques de x, se peut toujours trouver algebriquement, ou par les logarithmes, ou par des arcs de cercle. Or nous avons demontré dans les deux premiers Articles de ce Chapitre, qu'on peut toujours intégrer absolument, ou par le cercle ou l'hyperbole toute formule rationelle, dans laquelle le denominateur est reductible en facteurs simples ou doubles; & de plus nous avons fait voir dans le troisieme Article la possibilité de cette resolution dans un polynome general rationel; il ne peut donc rester aucun doute sur la solidité de cette demonstration. Cependant, comme cette verité est trés importante, il sera a propos de la confirmer par des principes tirès du Chapitre precedent, aprés avoir rappellé en peu de mots, & comme récapitulé l'etat de la proposition.

Une fonction algebrique rationelle quelconque, telle que $x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} +$ &c. contient des facteurs simples, comme $x+a, x+b, x+c$, &c. jusqu'au nombre de termes m, ce qui est connu par les Elemens de l'Algebre. On sait aussi que toutes les fonctions algebriques de cette forme ne sont pas toujours resolubles en facteurs simples réels. Il arrive souvent que

quel-

quelques-uns ou peut-eſtre tous ſont des quantités imaginaires. Mais il eſt demontré dans l'Algebre que lorſqu'une equation a des facteurs ou racines imaginaires, leur nombre eſt toujours pair; donc une fonction Algebrique quelconque de la forme precedente ſera toujours reductible en facteurs trinomes, dont le nombre ſera $\frac{m}{2}$, ſi m eſt un nombre pair; mais ſi m eſt impair, l'equation contiendra $\frac{m-1}{2}$ facteurs trinomes, & de plus un facteur ſimple. On aſſure ordinairement que la reſolution d'une fonction Algebrique rationelle en facteurs trinomes eſt tellement poſſible, que, ſi m eſt un nombre pair, on a des facteurs trinomes réels, &, ſi m eſt impair, on a outre les facteurs trinomes réels un facteur ſimple auſſi réel. Il eſt vrai que, lorſqu'une equation n'a que deux facteurs ſimples imaginaires, le produit eſt neceſſairement réel; car le produit de ces deux facteurs multiplié par le produit de tous les autres qu'on ſuppoſe réels, doit rendre l'equation propoſée & par conſequent une quantité réelle; ce qui ſeroit impoſſible; Si le produit des deux facteurs imaginaires n'etoit pas réel. En general quelque ſoit le nombre des facteurs imaginaires d'une equation, leur produit doit eſtre neceſſairement une quantité réelle; mais la difficulté conſiſte a demontrer que toute equation Algebrique compoſée d'un nombre quelconque de facteurs ſimples ima-

ginaires peut toujours se resoudre en trinomes réels. C'est ce que nous tacherons de faire en n'employant que les principes du chapitre precedent,

Puisque le nombre des facteurs imaginaires est toujours pair, il s'ensuit que, m etant impair, la fraction proposée a au moins un facteur réel. Soit ce facteur $x+z$ & supposons que la fonction designée par X soit divisée par $x+z$, on aura une fonction Y de dimension paire du degré $m-1$, & $X=Y$, $\overline{x+z}$. Il suffit de faire voir que la fonction generale Y. de dimension paire est reductible en facteurs trinomes réels; ce qui ne souffre aucune difficulté, que quand l'equation a des racines imaginaires, Soit donc dans la fonction X de dimension paire un nombre de facteurs imaginaires representé par $2n$, nous ferons voir que, si $x+p$ est un facteur imaginaire de la fonction X, il y a toujours parmi les autres facteurs imaginaires un tel facteur qui etant multiplié par $x+p$ produit un facteur trinome réel. Soit pour cela $x+a+b\sqrt{-1}$ un facteur imaginaire de la fonction X; Nous avons demontré que toute quantité imaginaire peut se reduire a cette forme; soit $x+u+z\sqrt{-1}$ l'autre facteur imaginaire, lequel multiplié par le premier, est supposé donner un produit réel; le produit de ces deux facteurs sera

$$\begin{array}{ll} x^2 + ax & + au \\ \quad + bx\sqrt{-1} & + bu\sqrt{-1} \\ \quad + ux & + az\sqrt{-1} \\ \quad + zx\sqrt{-1} & - bz \end{array}$$

Or il eſt clair que ce produit ne peut eſtre réel, a moins que z, & u ne ſoient tels que $b\sqrt{-1} + z\sqrt{-1} = o$, & de même $bu\sqrt{-1} + az\sqrt{-1} = o$, ce qui fournit deux equations d'ou l'on tire $z = -b$, & $u = a$; d'ou il ſuit que le facteur imaginaire qui fait avec $x + a + b\sqrt{-1}$ un produit réel ne peut être que $x + a - b\sqrt{-1}$. Il faut donc demontrer que, Si $x + a + b\sqrt{-1}$ eſt un facteur de la fonction X, le facteur $x + a - b\sqrt{-1}$ eſt neceſſairement un autre facteur de la même fonction.

Soit, par les theoremes du chapitre precedent, $a = f.\ \text{Cos.}\ \varphi$, & $b\sqrt{-1} = f.\ \text{Sin.}\ \varphi . \sqrt{-1}$, on aura $f = \frac{a}{\text{Cos.}\ \varphi} = \frac{b}{\text{Sin.}\ \varphi}$; Donc $\frac{a}{b} = \frac{\text{Cos.}\ \varphi}{\text{Sin.}\ \varphi} =$ Cotang. φ, ou $\varphi =$ Arc. Cotang. $\frac{a}{b}$, & $f = \frac{a}{\text{Cos. Arc. Cotang.}\ \frac{a}{b}}$; Donc le facteur $x + a + b\sqrt{-1}$ pourra être repreſenté par $x + f.\ \text{Cos.}\ \varphi + f.\ \text{Sin.}\ \varphi . \sqrt{-1}$, ſuppoſant φ un arc de

cercle dont la cotangente est $\frac{a}{b}$, le rayon 1, & f exprimant la quantité $\frac{a}{Cos.\ Arc.\ Cotang.\ \frac{a}{b}}$

Si $x + f.\ Cos.\ \varphi + f.\ Sin.\ \varphi . \sqrt{-1}$ est un facteur de la fonction X, on sçait qu'en substituant $-(f.\ Cos.\ \varphi + f.\ Sin.\ \varphi \sqrt{-1})$ a la place de x la fonction doit devenir $= o$; or cette substitution est aisée a faire, car nous avons (Art. LXXV.)

$$x = -f(Cos.\ \varphi + Sin.\ \varphi \sqrt{-1})$$

$$x^2 = f^2(Cos.\ 2\varphi + Sin.\ 2\varphi . \sqrt{-1})$$

$$x^3 = -f^3(Cos.\ 3\varphi + Sin.\ 3\varphi . \sqrt{-1}), \text{\& en general}$$

$$x^m = \pm f^m(Cos.\ m\varphi + Sin.\ m\varphi . \sqrt{-1}.)$$

Donc en substituant dans le polynome general $x^m + A x^{m-1} + B x^{m-2} +$ &c. on aura

$+ f^m . Cos.\ m\varphi - A f^{m-1}\ Cos.\ \overline{m-1}.\ \varphi + B f^{m-2}\ Cos.\ \overline{m-2}.\varphi \ldots\ldots\ldots\ldots + (f^m . Sin.\ m\varphi - A f^{m-1}\ Sin.\ \overline{m-1}.\varphi + B f^{m-2}.\ Sin.\ \overline{m-2}.\varphi \ldots\ldots\ldots\ldots)\sqrt{-1}$ & en faisant $f^m.\ Cos.\ m\varphi - A f^{m-1}.\ Cos.\ \overline{m-1}.\ \varphi + B f^{m-2}.\ Cos.\ \overline{m-2}, \varphi \ldots\ldots\ldots\ldots = M$, & $f^m . Sin.\ m\varphi - A f^{m-1}.\ Sin.\ \overline{m-1}.\ \varphi + B f^{m-2}.\ Sin.\ \overline{m-2}.\ \varphi \ldots\ldots\ldots\ldots = N$, on

aura $M+N\sqrt{-1}=o$; Or si $M+N\sqrt{-1}=o$, il s'ensuit que $M=o$, & $N=o$; car autrement on auroit $N\sqrt{-1}=-M$, c'est a dire, une quantité réelle egale a une quantité imaginaire, ce qui est contradictoire; Donc puisque $M=o$, & $N=o$, non seulement $M+N\sqrt{-1}=o$, mais encore $M-N\sqrt{-1}=o$.

Il faut maintenant observer si le facteur simple $x+a-b\sqrt{-1}$, qui devient $x+f.\text{Cos.}\,\varphi-f.\text{Sin.}\,\varphi.\sqrt{-1}$, & qui est le seul, lequel etant combiné avec le premier peut rendre un produit réel, est aussi facteur de la fonction X; il suffit pour cela de substituer $-f(\text{Cos.}\,\varphi-\text{Sin.}\,\varphi.\sqrt{-1})$ a la place de x, & on observera si cette substitution fait evanouïr la fonction X; or on trouvera comme cy devant

$$x^2=+f^2.(\text{Cos.}\,2\,\varphi-\text{Sin.}\,2\,\varphi\sqrt{-1})$$

$$x^3=-f^3.(\text{Cos.}\,3\,\varphi-\text{Sin.}\,3\,\varphi.\sqrt{-1}),$$ & generalement $x^m=\pm f^m(\text{Cos.}\,m\,\varphi-\text{Sin.}\,m\,\varphi\sqrt{-1})$

La fonction X devient par substitution

$+f^m.\text{Cos.}\,m\,\varphi-Af^{m-1}.\text{Cos.}\,\overline{m-1}.\,\varphi+Bf^{m-2}.\text{Cos.}\,\overline{m-2}.\,\varphi\ldots\ldots\ldots\ldots(-f^m.\text{Sin.}\,m\,\varphi+Af^{m-1}.\text{Sin.}\,\overline{m-1}.\,\varphi-Bf^{m-2}.\text{Sin.}\,\overline{m-2}.\,\varphi\ldots\ldots\ldots\ldots)\sqrt{-1}$; expression qui devient (en retenant les mesmes denominations que

cy devant) $= M - N\sqrt{-1}$. Si cette quantitè $= o$, la quantité $x + f.\,\text{Cos.}\,\varphi - f.\,\text{Sin.}\,\varphi.\sqrt{-1} = x + a - b\sqrt{-1}$ fera un facteur de la fonction X; mais nous avons demontré impossible que $x + a + b\sqrt{-1}$ facteur de la fonction X, ou $M + N\sqrt{-1}$ soit $= o$, a moins que $M - N\sqrt{-1}$, ou $x + a - b\sqrt{-1}$ ne soit aussi $= o$, c'est a dire, a moins qu'il ne soit aussi facteur de la fonction X; donc $x + a + b\sqrt{-1}$, & $x + a - b\sqrt{-1}$ etant les facteurs de la fonction X, cette fonction aura pour un de ses facteurs un trinome réel $x^2 + 2ax + aa + bb$. On fera le mesme raisonement sur tout autre facteur imaginaire, & on demontrera qu'un facteur imaginaire quelconque peut tellement être combiné avec un autre, que le produit devienne un trinome réel.

Il n'y reste qu'une difficulté, c'est lorsque la fonction X a plusieurs facteurs egaux, c'est a dire, lorsque la fonction contient le facteur imaginaire $x + a + b\sqrt{-1}$ deux, trois fois, ou davantage. On a bien demontré que, $x + a + b\sqrt{-1}$ etant un facteur de la fonction X, la quantité $x + a - b\sqrt{-1}$ devoit en estre aussi un autre facteur; mais on n'a pas demontré egalement,

que le dernier facteur dût s'y trouver autant de fois que le premier; & par consequent on pourroit en conclure que la reduction a des facteurs trinomes réels n'est pas toujours possible. Il reste donc ce doute a resoudre. Si la fonction X contient l'expression $x+a+b\sqrt{-1}$ un certain nombre de fois representé par n. Il est evident par la demonstration precedente que $x+a-b\sqrt{-1}$ sera au moins une fois le facteur de cette fonction, donc on pourra diviser X par le facteur trinome $x^2+2ax+aa+bb$; soit le quotient

$$x^{m-2}+A'x^{m-3}+B'x^{m-4}+Cx^{m-5}+\ldots\ldots=D$$

entre les facteurs de laquelle fonction on aura encore $x+a+b\sqrt{-1}$ un certain nombre de fois exprimé par $n-1$; donc cette fonction aura encore au moins une fois le facteur $x+a-b\sqrt{-1}$, & par consequent si on divise la fonction D par $x^2+2ax+a^2+b^2$, & qu'on ait l'autre fonction $E=x^{m-4}+A''x^{m-5}+B''x^{m-6}+C''x^{m-7}\ldots\ldots$, cette fonction ne contiendra plus le facteur $x+a+b\sqrt{-1}$ qu'un certain nombre de fois exprimé par $n-2$. Il est evident qu'on peut continuer le même raisonement jusqu'a ce qu'on arrive a la fonction $x^{m-2n}+\alpha x^{m-2n-1}+\beta x^{m-2n-2}\ldots\ldots=F$,

entre les facteurs de laquelle on ne trouve plus $x+a+b\sqrt{-1}$. De plus cette fonction n'aura point de facteur tel que $x+a-b\sqrt{-1}$, car, s'il y en avoit un, nous avons demontré qu'il y auroit aussi le facteur $x+a+b\sqrt{-1}$; mais ce dernier ne s'y trouve plus, puisqu'on l'a fait disparoitre par la division; donc si $x+a+b\sqrt{-1}$ se trouve un nombre de fois quelconque entre les facteurs d'une fonction, il faut que l'autre facteur $x+a-b\sqrt{-1}$ s'y trouve exactement autant de fois.

Nous nous sommes fort etendus sur cette matiere, que nous avons crû meriter beaucoup d'attention; nous aurions pû la traiter plus briévement, en rappellant seulement ce que nous avons demontré dans le Chapitre precedent, sçavoir, que toute quantité imaginaire quelconque est comprise dans la forme generale $M+N\sqrt{-1}$, c'est a dire, que les quantités imaginaires sont toujours composées de deux membres dont l'un est réel, & l'autre une quantité imaginaire multipliée par $\sqrt{-1}$; le signe radical $\sqrt{-1}$ renferme essentiellement aussi bien le signe + que le signe —, & par consequent connoissant une racine imaginaire d'une equation quelconque, l'autre se decouvre d'elle même. Il est de plus demontré en Algebre que le nombre des racines imaginaires dans une equation quelconque est toujours pair, & que leur produit

produit eſt réel. Donc une racine imaginaire $x=a+b\sqrt{-1}$ aura parmy les autres ſa compagne $a-b\sqrt{-1}$; & ſi $x-a-b\sqrt{-1}$ eſt un facteur imaginaire d'une equation quelconque, la formule $x-a+b\sqrt{-1}$ ſera auſſi un autre facteur. On comprend donc aisément que toutes les racines imaginaires d'une equation quelconque etant reductibles a la forme $M+N\sqrt{-1}$, il s'enſuit neceſſairement que toute equation eſt auſſi reſoluble en facteurs réels ſimples ou doubles du ſecond degré. Car les racines réelles fourniſſent toujours autant de facteurs ſimples réels, & chaque racine imaginaire $x-a+b\sqrt{-1}$ etant jointe par addition, ou par multiplication avec ſa compagne $x-a-b\sqrt{-1}$ produit dans le premier Cas une ſomme réelle ſimple, & dans le ſecond un facteur double réel; de ſorte que, ſi une equation du degré $m=n+2r$ avoit n racines réelles, & $2r$ racines imaginaires dont chacune ſeroit de la forme $M+N\sqrt{-1}$, cette equation aura n facteurs ſimples réels, & r facteurs doubles réels.

Maintenant pour revenir a l'equation generale $\frac{Pdx}{Q}$ on voit que ſon intégrale peut être compoſée d'entiers qui reſultent de la diviſion de la fraction $\frac{P}{Q}$; ces parties etant purement algebriques ſont intégrables abſolument; l'intégrale peut auſſi être compoſée de facteurs

ſimples du denominateur Q, & alors elle renferme des quantités logarithmiques; mais il peut arriver que le denominateur contienne une puiſſance de quelque facteur ſimple, & que cette quantité logarithmique ſoit jointe avec une quantité Algebrique ; alors la quantité logarithmique pourra diſparoitre dans l'intégrale qui ne contiendroit plus que des quantités algebriques. Donc le denominateur Q ayant tous ſes facteurs ſimples réels, ſi l'intégrale n'eſt pas algebrique, elle dependra des logarithmes. Mais ſi le denominateur Q contient des facteurs ſimples imaginaires, on auroit alors des logarithmes imaginaires; or puiſque les racines imaginairés vont toujours en nombre pair, & que leur produit eſt toujours réel, il s'enſuit qu'on pourra avoir des facteurs trinomes réels juſqu'au nombre qui ſera la moitié de celui des facteurs imaginaires & on aura par le moyen de ces facteurs les parties de l'intégrale qui dependent de la quadrature du cercle, comme nous avons expliqué fort au long dans les Chapitres precedens. Il faut avoüer cependant qu'on n'a point de regle generale par laquelle on puiſſe aſſigner actuellement ces facteurs, puiſque, dès qu'une equation paſſe le quatrième degré, les methodes connues juſqu'a preſent ne ſuffiſent pas pour en decouvrir les racines. Mais pour le Cas preſent il ſuffit d'être aſſuré que toute equation contient ces facteurs réels, quoiqu'on n'ait aucune Methode generale pour les trouver.

CHAPITRE V.

De la Reduction de plusieurs Différentielles irrationelles en Différentielles rationelles.

CLXXII.

SUPPOSE' que dans la différentielle Xdx la quantité X soit une fonction quelconque de la variable x & de constantes réelles. Comme $(ax^m + bx^n + \&c.)^\lambda + (e + fx^p + gx^q + \&c.)^\mu + (h + lx^r + \&c.)^\nu \&c.$; si tous les exposans λ, μ, ν, &c. des puissances dont X est composée, & tous les exposans $m, n, p, q, r, \&c.$ de la variable x dans chaque terme particulier de ces puissances, sont des nombres entiers ou zero, la fonction X & la différentielle Xdx sont nommées *rationelles*, & on les appelle *irrationelles*, quand quelqu'un de ces exposans est une fraction.

CLXXIII.

PROBLEME I. Reduire la différentielle Xdx en rationelle, lorsque les exposans λ, μ, ν, &c. des puissances dont X est composée etant tous des nombres entiers,

ou zero, quelques-uns des exposans m, n, p, q, r, &c. de x dans les termes particuliers de ces puissances sont des fractions.

Soient les exposans m, p, &c. des fractions, $\frac{\sigma}{\rho}$, $\frac{\pi}{\tau}$, &c. reduites a leurs plus petits termes, ensorte que σ & ρ, π & τ soient des nombres entiers premiers entr'eux. On cherchera d'abord le plus petit nombre entier θ qui puisse être mesuré par les denominateurs des fractions ρ, τ &c.; ensuite on supposera $x = z^\theta$, par consequent $dx = \theta z^{\theta-1} dz$, & on substituera $\theta z^{\theta-1} dz$ au lieu de dx, & z^θ au lieu de x dans la différentielle proposée $X dx$; On ecrira donc $z^{\frac{\theta\sigma}{\rho}}$ au lieu de $x^{\frac{\sigma}{\rho}}$ & $z^{\frac{\theta\pi}{\tau}}$ au lieu de $x^{\frac{\pi}{\tau}}$; or puisque θ est exactement divisible par ρ & par τ, les puissances $z^{\frac{\theta\sigma}{\rho}}$, $z^{\frac{\theta\pi}{\tau}}$ auront des nombres entiers pour exposants, & la différentielle $X dx$ sera changée en rationelle. *C. Q. F. T.*

CLXXIV.

COROLLAIRE I. Si dans la différentielle $X dx$ la quantité X ne contient que des fonctions rationelles de x, & des puissances fractionaires $(e+fx)^{\frac{\sigma}{\rho}}$, $(e+fx)^{\frac{\pi}{\tau}}$, &c. du binome simple $e+fx$; on la rendra rationelle, en supposant $e+fx = z$. Car par cette substitu-

tion on aura $x = \frac{z-e}{f}$, $dx = \frac{dz}{f}$, $(e+fx)^{\frac{\sigma}{\varepsilon}} = z^{\frac{\sigma}{\varepsilon}}$, $(e+fx)^{\frac{\pi}{\tau}} = z^{\frac{\pi}{\tau}}$, &c. & en fubftituant ces valeurs dans Xdx, cette différentielle aura les conditions requifes pour être reduite en rationelle par le Probleme I.

CLXXV.

Corollaire II. De même fi dans la différentielle Xdx la quantité X ne contient que des fonctions rationelles de x, & des puiffances fractionaires $\left(\frac{e+fx}{a+bx}\right)^{\frac{\sigma}{\varepsilon}}$, $\left(\frac{e+fx}{a+bx}\right)^{\frac{\pi}{\tau}}$, &c. de $\frac{e+fx}{a+bx}$; on la rendra rationelle en fuppofant $\frac{e+fx}{a+bx} = z$; car on aura par cette fuppofition $x = \frac{az-e}{f-bz}$, $dx = \frac{adz(f-bz)+bdz(az-e)}{(f-bz)^2}$; $\left(\frac{e+fx}{a+bx}\right)^{\frac{\sigma}{\varepsilon}} = z^{\frac{\sigma}{\varepsilon}}$; $\left(\frac{e+fx}{a+bx}\right)^{\frac{\pi}{\tau}} = z^{\frac{\pi}{\tau}}$, & en fubftituant ces valeurs dans Xdx, cette différentielle aura les conditions requifes pour être reduite en rationelle par le Probleme I.

CLXXVI.

Theoreme I. La différentielle $x^{\frac{\pi n}{\tau}-1} dx (e + fx^n + gx^{2n} + hx^{3n} + \&c.)^{\lambda} . (a + bx^n + cx^{2n} + \&c.)^{\mu}$

&c., en ſuppoſant $x^{\frac{n}{\tau}} = z$, ou $x^n = z^\tau$ ſe reduit à celle-cy $\frac{\tau}{n} z^{\pi-1} dz (e + f z^\tau + g z^{2\tau} + h z^{3\tau} + \&c.)^\lambda \times$: $(a + b z^\tau + c z^{2\tau} + \&c.)^\mu$, qui ſera rationelle, lorſque τ eſt un nombre entier quelconque, & π, λ, μ des nombres entiers ou zero, quelque ſoit n.

DEMONSTRATION. Puiſque $x^n = z^\tau$, on aura $x = z^{\frac{\tau}{n}}$, $x^{\frac{\pi n}{\tau} - 1} = z^{\pi - \frac{\tau}{n}}$; $dx = \frac{\tau}{n} z^{\frac{\tau}{n} - 1} dz$, $x^{\frac{\pi n}{\tau} - 1} dx = \frac{\tau}{n} z^{\pi - 1} dz$, $x^{2n} = z^{2\tau}$, $x^{3n} = z^{3\tau}$, &c., & en ecrivant ces valeurs dans la différentielle propoſée, elle devient $\frac{\tau}{n} z^{\pi-1} dz$ $(e + f z^\tau + g z^{2\tau} + h z^{3\tau} + \&c.)^\lambda . (a + b z^\tau + c z^{2\tau} + \&c.)^\mu$ dans laquelle tous les expoſans de la variable z, & ceux des puiſſances dont cette différentielle eſt compoſée ſont des nombres entiers ou zero; donc elle ſera rationelle. *C. Q. F. D.*

CLXXVII.

COROLLAIRE I. Si $\tau = 1$, ou ſi la différentielle propoſée eſt $x^{\pi n - 1} dx (e + f x^n + g x^{2n} + h x^{3n} + \&c.)^\lambda . (a + b x^n + c x^{2n} + \&c.)^\mu$, en faiſant $x^n = z$ ou $x = z^{\frac{1}{n}}$, on la reduira à celle-cy $\frac{1}{n} z^{\pi - 1} dz (e + f z + g z^2 + h z^3 + \&c.)^\lambda$

$\times (a+bz+cz^2+\&c.)^\mu$, qui ſera rationelle, lorſque π, λ, μ ſont des nombres entiers ou zero.

CLXXVIII.

COROLLAIRE II. Si $\tau=2$, ou ſi la différentielle propoſée eſt $x^{\frac{\pi n}{2}-1} dx(e+fx^n+gx^{2n}+\&c.)^\lambda . (a+bx^n+cx^{2n}+\&c.)^\mu$; en ſuppoſant $x^{\frac{n}{2}}=z$, ou $x=z^{\frac{2}{n}}$, on la reduira a celle-cy $\frac{2}{n} z^{\pi-1} dz(e+fz^2+gz^4+hz^6+\&c.)^\lambda . (a+bz^2+cz^4+\&c.)^\mu$, qui eſt rationelle, lorſque π, λ, μ ſont des nombres entiers ou zero.

CLXXIX.

COROLLAIRE III. Si dans la différentielle du theoreme $x^{\frac{\pi n}{\tau}-1} dx(e+fx^n+gx^{2n}+hx^{3n}+\&c.)^\lambda . (a+bx^n+cx^{2n}+\&c.)^\mu$, on ſuppoſe l'expoſant $\mu=o$, & par conſequent la puiſſance $(a+bx^n+cx^{2n}+\&c.)^\mu =1$, cette différentielle deviendra $x^{\frac{\pi n}{\tau}-1} dx(e+fx^n+gx^{2n}+hx^{3n}+\&c.)^\lambda$ laquelle en faiſant $x=z^{\frac{\tau}{n}}$ ſe reduira a celle-cy $\frac{\tau}{n} z^{\pi-1} dz(e+fz^\tau+gz^{2\tau}+hz^{3\tau}+\&c.)^\lambda$

qu'on reduira (Cor. I.) en cette autre $\frac{1}{n} z^{\tau-1} dz (e + fz + gz^2 + bz^3 + \&c.)^{\lambda}$ en faisant $\tau = 1$, & (par le Cor. II.) en $\frac{2}{n} z^{\tau-1} dz (e + fz^2 + gz^4 + bz^6 + \&c.)^{\lambda}$ en faisant $\tau = 2$.

CLXXX.

COROLLAIRE IV. On peut ôter les termes qu'on voudra dans les puissances dont la différentielle du theoreme est composée, en egalant a zero la constante ou le coefficient de ce terme, & en l'effaçant de même dans la différentielle reduite. Par exemple, si on veut que les puissauces soient des binomes, on ne retiendra dans chacune que les deux premiers termes $e + fx^n$, & $a + bx^n$, & on aura la différentielle $x^{\frac{\tau n}{\tau} - 1} dx (e + fx^n)^{\lambda} . (a + bx^n)^{\mu}$, & sa reduite ou sa transformée, en faisant $x = z^{\frac{\tau}{n}}$, sera $\frac{\tau}{n} z^{\tau-1} dz (e + fz^{\tau})^{\lambda} . (a + bz^{\tau})^{\mu}$. Si on veut que la premiere puissance devienne un binome, & l'autre un trinome, on retiendra les trois premiers termes $e + fx^n + gx^{2n}$ de la premiere puissance, & les deux premiers de la seconde, en supposant nuls les coefficiens des autres termes, & on aura la différentielle

n

$x^{\frac{\pi n}{\nu}-1} dx(e+fx^n+gx^{2n})^\lambda . (a+bx^n)^\mu$ & sa reduite $\frac{\nu}{n} z^{\pi-1} dz(e+fz^\nu+gz^{2\nu})^\lambda . (a+bz^\nu)^\mu$.

CLXXXI.

THEOREME II. La différentielle $x^{\pi n-1} dx(e+fx^n)^{\frac{\lambda}{\nu}}$, dans laquelle π est un nombre entier ou zero, & λ, ν des nombres entiers, en supposant $e+fx^n=z^\nu$ peut toujours se reduire a la différentielle rationelle $\frac{\nu}{nf^\pi} z^{\lambda+\nu-1} dz \times (z^\nu-e)^{\pi-1}$, lorsque f est positif, & a la différentielle $-\frac{\nu}{nf^\pi} z^{\lambda+\nu-1} dz(e-z^\nu)^{\pi-1}$ lorsque f est negatif.

DEMONSTRATION. Soit supposé $e+fx^n=z^\nu$, on aura $x^n=\frac{z^\nu-e}{f}$, $x=\frac{(z^\nu-e)^{\frac{1}{n}}}{f^{\frac{1}{n}}}$; $x^{\pi n-1}=\frac{(z^\nu-e)^{\pi-\frac{1}{n}}}{f^{\pi-\frac{1}{n}}}$; $dx=\frac{\frac{\nu}{n} z^{\nu-1} dz(z^\nu-e)^{\frac{1}{n}-1}}{f^{\frac{1}{n}}}$; $(e+fx^n)^{\frac{\lambda}{\nu}}=z^\lambda$; par consequent $x^{\pi n-1} dx(e+fx^n)^{\frac{\lambda}{\nu}}=\frac{\nu}{nf^\pi} z^{\lambda+\nu-1} dz\,(z^\nu-e)^{\pi-1}$. *C. Q. F. D.*

Si on suppose $e-fx^n=z^\nu$, on aura $fx^n=e-z^\nu$; $x=\frac{(e-z^\nu)^{\frac{1}{n}}}{f^{\frac{1}{n}}}$; $x^{\pi n-1}=\frac{(e-z^\nu)^{\pi-\frac{1}{n}}}{f^{\pi-\frac{1}{n}}}$; $dx=-\frac{\nu}{nf^{\frac{1}{n}}} z^{\nu-1} dz \times$

$(e-z^{\nu})^{\frac{1}{n}-1}$; & $(e-fx^{n})^{\frac{\lambda}{\nu}}=z^{\lambda}$; par consequent $x^{\pi n-1}dx.$

$(e+fx^{n})^{\frac{\lambda}{\nu}}=-\frac{\nu}{nf^{\pi}}z^{\lambda+\nu-1}dz(e-z^{\nu})^{\pi-1}$ C. Q. F. D.

CLXXXII.

COROLLAIRE I. La différentielle $x^{q}dx(e+fx)^{\frac{\lambda}{\nu}}$, dans laquelle q est un nombre entier, ou zero, λ & ν des nombres entiers, en supposant $e+fx=z^{\nu}$ se reduit a la différentielle rationelle $\frac{\nu}{f^{q+1}}z^{\lambda+\nu-1}dz(z^{\nu}-e)^{q}$, lorsque f est positif, & a la différentielle $-\frac{\nu}{f^{q+1}}z^{\lambda+\nu-1}dz.(e-z^{\nu})^{q}$. Lorsque f est negatif; car en comparant la différentielle $x^{q}dx(e+fx)^{\frac{\lambda}{\nu}}$ avec la différentielle $x^{\pi n-1}dx\times(e+fx^{n})^{\frac{\lambda}{\nu}}$ on trouve $n=1$, $\pi n-1=\pi-1=q$, $\pi=q+1$; par consequent la reduite $\frac{\nu}{nf^{\pi}}z^{\lambda+\nu-1}dz(z^{\nu}-e)^{\pi-1}=\frac{\nu}{f^{q+1}}z^{\lambda+\nu-1}dz(z^{\nu}-e)^{q}$, & la reduite $-\frac{\nu}{nf^{\pi}}z^{\lambda+\nu-1}dz(e-z^{\nu})^{\pi-1}=-\frac{\nu}{f^{q+1}}z^{\lambda+\nu-1}dx(e-z^{\nu})^{q}$.

CLXXXIII.

COROLLAIRE II. La différentielle $x^{\pi n-1}dx\sqrt{e+fx^n}$, en ſuppoſant $e+fx^n=z^2$ ſe reduit a la différentielle $\frac{2z^2dz}{nf^\pi}(z^2-e)^{\pi-1}$, lorſque f eſt poſitif, & a la différentielle $-\frac{2z^2dz}{nf^\pi}(e-z^2)^{\pi-1}$, lorſque f eſt negatif. Car en comparant $\sqrt{e+fx^n}$, ou $(e+fx^n)^{\frac{1}{2}}$ avec $(e+fx^n)^{\frac{\lambda}{\nu}}$ on trouve $\lambda=1$, $\nu=2$, & en ſubſtituant ces valeurs dans les différentielles du theoreme, elles ſe changent en celles que nous venons de propoſer.

CLXXXIV.

COROLLAIRE III. La différentielle $\frac{x^{\pi n-1}dx}{\sqrt{e+fx^n}}$, ou $x^{\pi n-1}dx(e+fx^n)^{-\frac{1}{2}}$, en ſuppoſant $e+fx^n=z^2$, ſe reduit a la différentielle $\frac{2dz}{nf^\pi}(z^2-e)^{\pi-1}$, lorſque f eſt poſitif, & a la différentielle $-\frac{2dz}{nf^\pi}(e-z^2)^{\pi-1}$, lorſque f eſt négatif; car en comparant $(e+fx^n)^{-\frac{1}{2}}$ avec $(e+fx^n)^{\frac{\lambda}{\nu}}$, on trouve $\lambda=-1$, & $\nu=2$.

CLXXXV.

COROLLAIRE IV. La différentielle $x^{\pi n-1}dx \times (e+fx^n)^{\frac{\lambda}{\nu}}.(a+bx^n+cx^{2n}+\&c.)^\mu$, dans laquelle π, λ, μ, ν sont des nombres entiers; en supposant $e+fx^n=z^\nu$ se reduit a la différentielle rationelle $\frac{\nu}{nf^\pi} \times z^{\lambda+\nu-1}dz(z^\nu-e)^{\pi-1}.[a+b(\frac{z^\nu-e}{f})+c(\frac{z^\nu-e}{f})^2+\&c.]^\mu$, lorsque f est positif, & a la différentielle $-\frac{\nu}{nf^\pi}z^{\lambda+\nu-1}dz(e-z^\nu)^{\pi-1}.[a+b(\frac{e-z^\nu}{f})+c \times (\frac{e-z^\nu}{f})^2+\&c.]^\mu$, lorsque f est negatif. Car en supposant $e+fx^n=z^\nu$, on trouve $x^n=\frac{z^\nu-e}{f}$, & $x^{\pi n-1}dx \times (e+fx^n)^{\frac{\lambda}{\nu}}=\frac{\nu}{nf^\pi}z^{\lambda+\nu-1}dz(z^\nu-e)^{\pi-1}$, lorsque f est positif; par consequent on aura dans ce cas $x^{\pi n-1}dx \times (e+fx^n)^{\frac{\lambda}{\nu}}.(a+bx^n+cx^{2n}+\&c.)^\mu=\frac{\nu}{nf^\pi}z^{\lambda+\nu-1}dz \times (z^\nu-e)^{\pi-1}.(a+b(\frac{z^\nu-e}{f})+c(\frac{z^\nu-e}{f})^2+\&c.)^\mu$. On demontre de même l'autre partie, par ce que f etant negatif, on a $x=\frac{e-z^\nu}{f}$, & $x^{\pi n-1}dx(e+fx^n)^{\frac{\lambda}{\nu}}=-\frac{\nu}{nf^\pi}z^{\lambda+\nu-1}dz(e-z^\nu)^{\pi-1}$.

CLXXXVI.

Corollaire V. Si dans le Corollaire precedent on ſuppoſe $c = o ; cx^{2n} + \&c. = o, \mu = -1, \lambda = 1, \nu = 2$, on aura $x^{\pi n - 1} dx (e + fx^n)^{\frac{1}{2}} . (a + bx^n)^{-1} = \frac{x^{\pi n - 1} dx \sqrt{e + fx^n}}{a + bx^n}$ $= \frac{2}{nf^\pi} . \frac{z^2 dz (z^2 - e)^{\pi - 1}}{a + b\left(\frac{z^2 - e}{f}\right)} = \frac{2 z^2 dz (z^2 - e)^{\pi - 1}}{nf^{\pi - 1}(af + b(z^2 - e))}$; lorſque f eſt poſitif, en ſuppoſant $e + fx^n = z^2$; & $x^{\pi n - 1} dx . \frac{(e + fx^n)^{\frac{1}{2}}}{a + bx^n} = -\frac{2 z^2 dz (e - z^2)^{\pi - 1}}{nf^{\pi - 1} \{af + b(e - z^2)\}}$. lorſque f eſt negatif.

Mais ſi le reſte etant le même on ſuppoſe $\lambda = -1$; $\nu = 2$, on aura $\frac{x^{\pi n - 1} dx}{(a + bx^n) . \sqrt{e + fx^n}} = \frac{2 dz (z^2 - e)^{\pi - 1}}{nf^\pi \left\{a + b\left(\frac{z^2 - e}{f}\right)\right\}}$ $= \frac{2 dz (z^2 - e)^{\pi - 1}}{nf^{\pi - 1}\{af + b(z^2 - e)\}}$ lorſque f eſt poſitif, & $\frac{x^{\pi n - 1} dx}{(a + bx^n) \sqrt{e - fx^n}} = -\frac{2 dz (e - z^2)^{\pi - 1}}{nf^{\pi - 1}\{af + b(e - z^2)\}}$ lorſque f eſt negatif.

CLXXXVII.

Theoreme III. La différentielle rationelle $x^{\pi n - 1} dx \left(\frac{e + fx^n}{a + bx^n}\right)^{\frac{\lambda}{\nu}}$ dans laquelle π eſt un nombre en-

tier ou zero, & λ, ν des nombres entiers devient rationelle en faiſant $\frac{e+fx^n}{a+bx^n}=y^\nu$, ou $x^n=\frac{ay^\nu-e}{f-by^\nu}$.

DEMONSTRATION. En ſuppoſant $x^n=z$, on aura (Art. CLXXVII.) $x^{\pi n-1}dx\left(\frac{e+fx^n}{a+bx^n}\right)^{\frac{\lambda}{\nu}}=\frac{1}{n}z^{\pi-1}dz\times\left(\frac{e+fz}{a+bz}\right)^{\frac{\lambda}{\nu}}$; or ſi dans cette formule on ſuppoſe encore $\frac{e+fz}{a+bz}=y^\nu$, on aura $z=\frac{ay^\nu-e}{f-by^\nu}=x^n$; par conſequent $z^{\pi-1}=\left(\frac{ay^\nu-e}{f-by^\nu}\right)^{\pi-1}$; $\left(\frac{e+fz}{a+bz}\right)^{\frac{\lambda}{\nu}}=y^\lambda$, & $dz=\frac{\nu ay^{\nu-1}dy(f-by^\nu)+\nu by^{\nu-1}dy(ay^\nu-e)}{(f-by^\nu)^2}$; donc $\frac{1}{n}z^{\pi-1}dz\times\left(\frac{e+fz}{a+bz}\right)^{\frac{\lambda}{\nu}}=\frac{1}{n}\left(\frac{ay^\nu-e}{f-by^\nu}\right)^{\pi-1}\times y^\lambda.\frac{\nu ay^{\nu-1}dy(f-by^\nu)+\nu by^{\nu-1}dy(ay^\nu-e)}{(f-by^\nu)^2}$ $=\frac{\nu}{n}y^{\lambda+\nu-1}dy\left(\frac{a(f-b)(ay^\nu-e)^{\pi-1}+b(ay^\nu-e)^\pi}{(f-by^\nu)^{\pi+1}}\right)$, différentielle dans laquelle tous les expoſans de la variable y & de ſes fonctions ſont des nombres entiers ou zero.

CLXXXVIII.

COROLLAIRE. Si on ſuppoſe $\lambda=1$, $\nu=2$, ou $\frac{\lambda}{\nu}=\frac{1}{2}$, la différentielle du theoreme deviendra $x^{\pi n-1}dx\times$

$\left(\frac{e+fx^n}{a+bx^n}\right)^{\frac{1}{2}}$, ou $x^{\pi n-1}dx\sqrt{\frac{e+fx^n}{a+bx^n}}$, & en faisant $\frac{e+fx^n}{a+bx^n}=y^2$, ou $x^n=\frac{ay^2-e}{f-by^2}$, elle se reduit a la différentielle suivante $\frac{2}{n}y^2\,dy\left(\frac{a(f-by^2)(ay^2-e)^{\pi-1}+b(ay^2-e)^{\pi}}{(f-by^2)^{\pi+1}}\right)$, qui est rationelle, lorsque π est un nombre entier ou zero.

CLXXXIX.

THEOREME IV. La différentielle $x^{\pi n-1}dx\times\{(e+fx^n)(a+bx^n)\}^{\frac{\lambda}{2}}$, dans laquelle π est un nombre entier ou zero, & λ un nombre entier impair en supposant $x^n=\frac{ey^2-a}{b-fy^2}$ se reduit a la différentielle rationelle $\frac{2(be-fa)^{\lambda+1}.\,y^{\lambda+1}dy(ey^2-a)^{\pi-1}}{n(b-fy^2)^{\pi+\lambda+1}}$.

DEMONSTRATION. En faisant $x^n=z$, on aura (Art. CLXXIX.) $x^{\pi n-1}dx\{(e+fx^n)(a+bx^n)\}^{\frac{\lambda}{2}}=\frac{1}{n}z^{\pi-1}dz\{(e+fz)(a+bz)\}^{\frac{\lambda}{2}}$; or si on suppose $\{(e+fz)(a+bz)\}^{\frac{1}{2}}=(e+fz)y$, on aura $(e+fz)(a+bz)=(e+fz)^2y^2$; par consequent $a+bz=ey^2+fzy^2$; $bz-fzy^2=ey^2-a$; $z=$

$x^n = \frac{ey^2-a}{b-fy^2}$; $z^{\pi-1} = \frac{(ey^2-a)^{\pi-1}}{(b-fy^2)^{\pi-1}}$; $dz =$
$\frac{2eydy(b-fy^2)+2fydy(ey^2-a)}{(b-fy^2)^2} = \frac{2ydy(be-fa)}{(b-fy^2)^2}$; $e+fz =$
$\frac{be-fa}{b-fy^2}$; $\{(e+fz)(a+bz)\}^{\frac{\lambda}{2}} = \frac{(be-fa)^\lambda y^\lambda}{(b-fy^2)^\lambda}$; donc on aura $\frac{1}{n}z^{\pi-1}dz\{(e+fz)(a+bz)\}^{\frac{\lambda}{2}} = \frac{1}{n}\cdot\frac{(ey^2-a)^{\pi-1}}{(b-fy^2)^{\pi-1}}\cdot$
$\frac{2ydy(be-fa)}{(b-fy^2)^2} \times \frac{(be-fa)^\lambda y^\lambda}{(b-fy^2)^\lambda} = \frac{2(be-fa)^{\lambda+1}\cdot y^{\lambda+1}dy(ey^2-a)^{\pi-1}}{n(b-fy^2)^{\pi+\lambda+1}}$;
différentielle rationelle, lorſque π & λ ſont des nombres entiers, ou zero. *C. Q. F. D.*

CXC.

Corollaire I. Lorſque $\lambda = 1$, ou que la différentielle propoſée eſt $x^{\pi n-1}dx\sqrt{(e+fx^n)(a+bx^n)}$, en ſuppoſant $x^n = \frac{ey^2-a}{b-fy^2}$, elle ſe reduit a celle-cy $\frac{2(be-fa)^2y^2dy(ey^2-a)^{\pi-1}}{(b+fy^2)^{\pi+2}}$; qui eſt rationelle, quand π eſt un nombre entier ou zero.

CXCI.

Corollaire II. Lorſque $\lambda = -1$, ou que la différentielle propoſée eſt $\frac{x^{\pi n-1}dx}{\sqrt{(e+fx^n)(a+bx^n)}}$, en ſuppo-

ſant

ſant $x^n = \frac{ey^2-a}{b-fy^2}$, on la reduira a celle-cy $\frac{2dy(ey^2-a)^{\pi-1}}{n(b-fy^2)^{\pi}}$ qui eſt rationelle quand π eſt un nombre entier, ou zero.

CXCII.

COROLLAIRE III. Si la différentielle propoſée etoit $x^{\pi n-1}dx(ex^n+fx^{2n})^{\frac{\lambda}{2}}$, on ſuppoſeroit dans la formule du theoreme $a=o$, & $b=1$, ce qui reduit la quantité $a+bx^n$, a x^n, & $(e+fx^n)(a+bx^n)$ a ex^n+fx^{2n}; la même ſuppoſition donne $x^n = \frac{ey^2-a}{b-fy^2} = \frac{ey^2}{1-fy^2}$, & la reduite devient $\frac{2.e^{\lambda+1}y^{\lambda+1}dy.(ey^2)^{\pi-1}}{n(1-fy^2)^{\pi+\lambda+1}} = \frac{2.e^{\pi+\lambda}y^{2\pi+\lambda-1}dy}{n(1-fy^2)^{\pi+\lambda+1}}$; Ainſi lorſque $\lambda=1$, ou que la propoſée eſt $x^{\pi n-1}dx\sqrt{ex^n+fx^{2n}}$, en ſuppoſant $x^n = \frac{ey^2}{1-fy^2}$, on la reduit a celle-cy $\frac{2.e^{\pi+1}y^{2\pi}dy}{n(1-fy^2)^{\pi+2}}$, & lorſque $\lambda=-1$, ou que la propoſée eſt $\frac{x^{\pi n-1}dx}{\sqrt{ex^n+fx^{2n}}}$, en ſuppoſant $x^n = \frac{ey^2}{1-fy^2}$, ſa reduite ſera $\frac{2.e^{\pi-1}y^{2\pi-1}dy}{n(1-fy^2)^{\pi}}$;

CXCIII.

PROBLEME II. Reduire la différentielle $x^{\pi n-1}dx$ $(e+fx^n+gx^{2n})^{\frac{\lambda}{2}}$ en rationelle, lorſque λ eſt un nombre entier impair, & π un nombre entier quelconque, ou zero.

SOLUTION. en faiſant $x^n=z$, on reduit la différentielle ptopoſée a celle-cy $\frac{1}{n}z^{\pi-1}dz(e+fz+gz^2)^{\frac{\lambda}{2}}$, qui ne peut être réelle a moins que $\sqrt{e+fz+gz^2}$ ne ſoit réelle; car en ſuppoſant que λ eſt un nombre impair $=2m+1$, on aura $\frac{\lambda}{2}=m+\frac{1}{2}$, & $(e+fz+gz^2)^{\frac{\lambda}{2}}=(e+fz+gz^2)^m\times\sqrt{e+fz+gz^2}$; Or $\sqrt{e+fz+gz^2}$ ne peut être réelle, lorſque les trois conſtantes e, f, g ſont negatives; Il faut donc qu'au moins l'une des trois ſoit poſitive, ce qui donne trois cas pour la ſolution du probleme.

CAS I. Lorſque g eſt poſitive, & les deux autres e, f telles qu'on voudra; on ſuppoſera $g=aa$, & $az+y=\sqrt{aazz+fz+e}$; d'ou l'on deduit $z=\frac{yy-e}{f-2ay}$; $az+y=\sqrt{aazz+fz+e}=\frac{fy-ayy-ae}{f-2ay}$; $(gzz+fz$

$+e)^{\frac{\lambda}{2}} = \frac{(fy-ayy-ae)^{\lambda}}{(f-2ay)^{\lambda}}$; $dz = \frac{2ydy(f-2ay)+2ady(yy-e)}{(f-2ay)^2}$

$= \frac{2dy(fy-ayy-ae)}{(f-2ay)^2}$; $\frac{1}{n}z^{\pi-1} = \frac{\frac{1}{n}(yy-e)^{\pi-1}}{(f-2ay)^{\pi-1}}$; & enfin

$\frac{1}{n}z^{\pi-1}dz(gzz+fz+e)^{\frac{\lambda}{2}} = \frac{\frac{1}{n}(yy-e)^{\pi-1}}{(f-2ay)^{\pi-1}} \times$

$\frac{2dy(fy-ayy-ae)}{(f-2ay)^2} \times \frac{(fy-ayy-ae)^{\lambda}}{(f-2ay)^{\lambda}} =$

$\frac{2dy.(yy-e)^{\pi-1}.(fy-ayy-ae)^{\lambda+1}}{n(f-2ay)^{\pi+\lambda+1}}$; différentielle rationelle, lorsque λ est un nombre entier, & π un nombre entier ou zero. *C. Q. F. T.*

CAS II. Lorsque e est positive, g & f etant telles qu'on voudra on supposera $e = bb$, & $b+yz = \sqrt{bb+fz+gzz}$; d'ou l'on deduira $z = \frac{2by-f}{g-yy}$; $\sqrt{bb+fz+gzz} = b+yz = \frac{byy-fy+bg}{g-yy}$; $(gzz +fz+e)^{\frac{\lambda}{2}} = \frac{(byy-fy+bg)^{\lambda}}{(g-yy)^{\lambda}}$; $z^{\pi-1} = \frac{(2by-f)^{\pi-1}}{(g-yy)^{\pi-1}}$;

$dz = \frac{2bdy(g-yy)+2ydy(2by-f)}{(g-yy)^2} = \frac{2dy(bg-fy+byy)}{(g-yy)^2}$;

& enfin $\frac{1}{n}z^{\pi-1}dz(gzz+fz+e)^{\frac{\lambda}{2}} = \frac{1}{n}\times$.

$$\frac{(2by-f)^{\pi-1}}{(g-yy)^{\pi-1}} \times \frac{2dy(bg-fy+byy)}{(g-yy)^2} \times \frac{(bg-fy+byy)^{\lambda}}{(g-yy)^{\lambda}}$$

$= \frac{2dy(2by-f)^{\pi-1} \cdot (bg-fy+byy)^{\lambda+1}}{n(g-yy)^{\pi+\lambda+1}}$; différentielle rationelle lorſque λ eſt un nombre entier, & π un nombre entier ou zero.

CAS III. Lorſque g & e etant negatives, f eſt poſitive, ou que la différentielle propoſée eſt $x^{\pi n-1}dx \times (fx^n - gx^{2n} - e)^{\frac{\lambda}{2}} = \frac{1}{n}z^{\pi-1}dz(fz - gz^2 - e)^{\frac{\lambda}{2}}$; il faut que ff ſoit plus grand que $4ge$. Car ſi on ſuppoſe $\sqrt{fz - gzz - e} = \pm u$ quantité réelle, on aura $fz - gz^2 - e = uu$, $z^2 - \frac{fz}{g} = \frac{-e-uu}{g}$, $\frac{ff}{4gg} - \frac{fz}{g} + zz = \frac{ff}{4gg} - (\frac{e+uu}{g})$, & $\frac{f}{2g} - z = \pm \frac{\sqrt{ff-4ge-4gu}}{2g}$; d'ou l'on voit que z ne peut être réelle, a moins que $ff - 4ge$ ne ſoit une quantité poſitive, ou que ff ne ſoit plus grand que $4ge$: on ſuppoſera donc $ff > 4ge$, & $\sqrt{\frac{fz}{g} - zz - \frac{e}{g}} = \sqrt{(-A+z)(B-z)}$, A, & B etant des conſtantes indeterminées dont on trouvera les valeurs réelles par l'equation $\frac{fz}{g} - zz - \frac{e}{g} = (-A+z) . \times (B-z) = -AB + Az - zz + Bz$ en faiſant AB

$=\frac{e}{g}$, & $A+B=\frac{f}{g}$; d'ou l'on deduit $B=\frac{f}{g}-A$; AB $=\frac{fA}{g}-AA=\frac{e}{g}$; $\frac{ff}{4gg}-\frac{fA}{g}+AA=\frac{ff-4ge}{4gg}$; $\frac{f}{2g}-A=\pm\frac{\sqrt{ff-4ge}}{2g}$; $A=\frac{f\mp\sqrt{ff-4ge}}{2g}$, & $B=\frac{f\pm\sqrt{ff-4ge}}{2g}$, quantités réelles.

Or en ſuppoſant $\sqrt{(-A+z)(B-z)}=(B-z)y$ on trouve $z=\frac{Byy+A}{yy+1}$, $B-z=\frac{B-A}{yy+1}$; $(B-z)y$ $=\frac{(B-A)y}{yy+1}=\sqrt{\frac{fz}{g}-zz-\frac{e}{g}}$, & $g^{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{fz}{g}-zz-\frac{e}{g}}=\sqrt{fz-gzz-e}=\frac{g^{\frac{1}{2}}(B-A)y}{yy+1}$; $fz-gzz-e=\frac{g(B-A)^2y^2}{(yy+1)^2}$; $(fz-gzz-e)^{\frac{\lambda}{2}}=\frac{g^{\frac{\lambda}{2}}(B-A)^{\lambda}y^{\lambda}}{(yy+1)^{\lambda}}$; $z^{\pi-1}=\frac{(Byy+A)^{\pi-1}}{(yy+1)^{\pi-1}}$ $dz=\frac{2Bydy(yy+1)-2ydy(Byy+A)}{(yy+1)^2}=\frac{2ydy(B-A)}{(yy+1)^2}$; par conſequent $\frac{1}{n}z^{\pi-1}dz(fz-gzz-e)^{\frac{\lambda}{2}}$ $=\frac{1}{n}\cdot\frac{(Byy+A)^{\pi-1}}{(yy+1)^{\pi-1}}\cdot\frac{2ydy(B-A)}{(yy+1)^2}\cdot\frac{g^{\frac{\lambda}{2}}(B-A)^{\lambda}y^{\lambda}}{(yy+1)^{\lambda}}=$ $\frac{2g^{\frac{\lambda}{2}}(B-A)^{\lambda+1}y^{\lambda+1}dy(Byy+A)^{\pi-1}}{n(yy+1)^{\pi+\lambda+1}}$, différentielle rationelle

lorſque π, & λ ſont des nombres entiers, ou zero. *C. Q. F. T.*

CXCIV.

Corollaire I. Si dans la différentielle Xdx la quantité X ne contient que des fonctions rationelles de x & des puiſſances fractionaires $(a+bx+cx^2)^{\frac{\lambda}{2}}$, $(a+bx+cx^2)^{\frac{\mu}{2}}$ &c. Du même trinome $a+bx+cx^2$; λ & μ etant des nombres impairs, & a, b, c des conſtantes réelles ou zero, on pourra toujours reduire cette différentielle en rationelle, en trouvant comme dans les trois cas du probleme precedent une quantité variable rationelle qui etant ſubſtituée au lieu de x rende rationelle la quantité $\sqrt{a+bx+cx^2}$.

CXCV.

Corollaire II. Si dans la différentielle Xdx la quantité X ne contient que des fonctions rationelles de x, & les deux puiſſances fractionaires $(a+bx)^{\frac{\lambda}{2}}$, $(b+kx)^{\frac{\mu}{2}}$, λ & μ etant des nombres impairs on pourra toujours reduire cette différentielle en rationelle, en faiſant $a+bx=zz$, ce qui donnera $(a+bx)^{\frac{\lambda}{2}}=z^{\lambda}$; x

$=\frac{zz-a}{b}$, & $(b+kx)^{\frac{\mu}{2}}=(b-\frac{ka}{b}+\frac{kzz}{b})^{\frac{\mu}{2}}$, qu'on rendra rationelle par l'un, ou l'autre des deux premiers cas du probleme precedent, en ſuppoſant $b-\frac{ka}{b}=e$, $\frac{k}{b}=g$, & $f=o$ dans le trinome $e+fz+gzz$.

CXCVI.

COROLLAIRE III. Si dans la fraction différentielle $\frac{Pdx}{Q}$ on a $P=X(a+bx)^{\frac{\lambda}{2}}$ & $Q=X'(b+kx)^{\frac{\mu}{2}}\pm X''(l+mx)^{\frac{\nu}{2}}$, a, b, b, k, l, m etant des conſtantes réelles; λ, μ, ν des nombres impairs, & X, X', X'' des fonctions rationelles de x, on pourra toujours rendre cette fraction rationelle. Car le produit des deux binomes quelconques $A+B$, $A-B$ eſt $AA-BB$, ainſi en multipliant le numerateur Pdx, & le denominateur Q par $X'(b+kx)^{\frac{\mu}{2}}\mp X''(l+mx)^{\frac{\nu}{2}}$, on ne changera point la valeur de la fraction, ſon denominateur deviendra $X'X'(b+kx)^{\mu}-X''X''(l+mx)^{\nu}$ fonction rationelle de x; Son numerateur deviendra $XX'dx(a+bx)^{\frac{\lambda}{2}}.(b+kx)^{\frac{\mu}{2}}\mp XX''dx(a+bx)^{\frac{\lambda}{2}}(l+mx)^{\frac{\nu}{2}}$ & la fraction entiere $\frac{Pdx}{Q}$ ſera egale aux deux fractions

$$\frac{XX'dx(a+bx)^{\frac{\lambda}{2}}\cdot(b+kx)^{\frac{\mu}{2}}}{X'X'(b+kx)^{\mu}-X''X'(l+mx)^{\nu}}\mp$$

$$\frac{XX''dx(a+bx)^{\frac{\lambda}{2}}\cdot(l+mx)^{\frac{\nu}{2}}}{X'X'(b+kx)^{\mu}-X'X''(l+mx)^{\nu}}$$

dont chacune pourra être reduite en rationelle par le Corollaire precedent.

CXCVII.

COROLLAIRE IV. Si dans la fraction différentielle $\frac{Pdx}{Q}$, P est une fonction rationelle de x, & $Q=X+X'(a+bx)^{\frac{\lambda}{2}}\pm X''(b+kx)^{\frac{\mu}{2}}$ on pourra toujours rendre cette fraction rationelle, car en multipliant le numerateur Pdx, & le denominateur Q par $X+X'\times(a+bx)^{\frac{\lambda}{2}}\mp X''(b+kx)^{\frac{\mu}{2}}$, on ne changera point la valeur de la fraction son denominateur deviendra $XX+2XX'(a+bx)^{\frac{\lambda}{2}}+X'X'(a+bx)^{\lambda}-X''X''(b+kx)^{\mu}$, son numerateur sera $PXdx+PX'dx(a+bx)^{\frac{\lambda}{2}}\mp PX''dx(b+kx)^{\frac{\mu}{2}}$, & la fraction entiere $\frac{Pdx}{Q}$ sera egale a trois fractions qui auront toutes le même denomi-

nominateur, & dont chacune pourra être reduite en rationelle par les Corollaires II. & III..

CXCVIII.

COROLLAIRE V. Si dans la fraction différentielle $\frac{Pdx}{Q}$, P est une fonction rationelle de x & $Q = X \times (e + fx + gx^2)^{\frac{\lambda}{2}} \pm X'(a + bx + cx^2)^{\frac{\mu}{2}}$, on pourra toujours la rendre rationelle; car en multipliant son numerateur Pdx, & son denominateur Q par $X(e + fx + gx^2)^{\frac{\lambda}{2}} \mp X'(a + bx + cxx)^{\frac{\mu}{2}}$, elle deviendra egale aux deux fractions

$$\frac{PXdx(e + fx + gxx)^{\frac{\lambda}{2}}}{XX(e + fx + gxx)^{\lambda} - X'X'(a + bx + cxx)^{\mu}} \mp \frac{PX'dx(a + bx + cxx)^{\frac{\mu}{2}}}{XX(e + fx + gx^2)^{\lambda} - X'X'(a + bx + cx^2)^{\mu}}$$

dont chacune a pour denominateur la même fonction rationelle de x, & peut être reduite en rationelle par le Corollaire I.

CXCIX.

THEOREME. Si dans la différentielle Xdx, X ne contient que des fonctions rationelles de x & la

quantité $\sqrt[m]{a+A\left(\frac{g+hx}{k+lx}\right)^{\frac{1}{\delta}}}$, ou $\sqrt[m]{a+b\sqrt[n]{c+A\left(\frac{g+hx}{k+lx}\right)^{\frac{1}{\delta}}}}$

ou $\sqrt[m]{a+b\sqrt[n]{c+e\sqrt[p]{f+A\left(\frac{g+hx}{k+lx}\right)^{\frac{1}{\delta}}}}}$, ou &c. A, a, b, c, e, f, g, h, k, l, &c. etant des conſtantes réelles, & δ, m, n, p, &c. des nombres entiers quelconques, on pourra toujours reduire cette différentielle en rationelle, en ſuppoſant egale a z la quantité $\sqrt[m]{a+A\left(\frac{g+hx}{k+lx}\right)^{\frac{1}{\delta}}}$, ou $\sqrt[m]{a+b\sqrt[n]{c+A\left(\frac{g+hx}{k+lx}\right)^{\frac{1}{\delta}}}}$, ou &c.

DEMONSTRATION. I.° Si on ſuppoſe $\sqrt[m]{a+A\left(\frac{g+hx}{k+lx}\right)^{\frac{1}{\delta}}}=z$, on aura $a+A\left(\frac{g+hx}{k+lx}\right)^{\frac{1}{\delta}}=z^m$; $\frac{g+hx}{k+lx}=\left(\frac{z^m-a}{A}\right)^{\delta}=Z$ fonction rationelle de z, lorſque m & δ ſont des nombres entiers; & par l'equation $\frac{g+hx}{k+lx}=Z$ on trouve $x=\frac{KZ-g}{h-lZ}=Z'$ fonction rationelle de z: donc, ſi on ſubſtitue Z' au lieu de x, dZ' au lieu de dx, & z au lieu de $\sqrt[m]{a+A\left(\frac{g+hx}{k+lx}\right)^{\frac{1}{\delta}}}$ dans la différentielle propoſée Xdx, elle deviendra toute rationelle. *C. Q. F. D.*

II.° Si on ſuppoſe $\sqrt[m]{a+b\sqrt[n]{c+A\left(\frac{g+hx}{k+lx}\right)^{\frac{1}{\delta}}}}=z$,

on aura $a+b\sqrt[n]{c+A\left(\frac{g+hx}{k+lx}\right)^{\frac{1}{\delta}}}=z^m$; $\sqrt[n]{c+A\left(\frac{g+hx}{k+lx}\right)^{\frac{1}{\delta}}}$ $=\frac{z^m-a}{b}$; $c+A\left(\frac{g+hx}{k+lx}\right)^{\frac{1}{\delta}}=\left(\frac{z^m-a}{b}\right)^n$, fonction rationelle de z, que nous designerons par Y; $\frac{g+hx}{k+lx}=\left(\frac{Y-c}{A}\right)^{\delta}$, fonction rationelle de z, que nous designerons par Y'; & par l'equation $\frac{g+hx}{k+lx}=Y'$, on trouvera $x=\frac{kY'-g}{h-lY'}$, fonction rationelle de z, que nous designerons par Y''; donc, si on substitue Y'' au lieu de x, dY'' au lieu de dx, & z au lieu de $\sqrt[m]{a+b\sqrt[n]{c+A\left(\frac{g+hx}{k+lx}\right)^{\frac{1}{\delta}}}}$ dans la différentielle proposée Xdx, elle deviendra toute rationelle. *C. Q. F. D.*

III°. On voit evidemment par ces deux demonstrations la demonstration de tous les cas possibles du theoreme.

CC.

Il sera commode d'avoir sous les yeux la Table suivante dans laquelle on verra tout d'un coup les différentielles affectées de radicaux, que nous avons reduites aux rationelles par les transformations expliquées dans ce Chapitre.

TABLE DE REDUCTION
DES DIFFÉRENTIELLES IRRATIONELLES.

I.

Différentielle. $X dx (e + fx^{m} + gx^{\frac{\sigma}{\rho}} + \&c.)^{\lambda}$ $(a + bx^{n} + cx^{\frac{\pi}{\tau}} + \&c.)^{\mu}$ &c. X etant une fonction rationelle de x.

Substitution. $x = z^{\theta}$, θ etant le plus petit nombre mesuré par les denominateurs ρ, τ, &c.; Z fonction rationelle de z qu'on trouve en substituant z^{θ} au lieu de x dans X.

Reduite. $\theta Z z^{\theta - 1} dz (e + fz^{\theta m} + gz^{\frac{\theta\sigma}{\rho}} + \&c.)^{\lambda}$ $(a + bz^{\theta n} + cz^{\frac{\theta\pi}{\tau}} + \&c.)^{\mu}$ &c. rationelle lorsque λ, μ, m, n, &c. sont des nombres entiers ou zero.

TABLE DE REDUCTION DES DIFFÉRENT.LES IRRAT.LES

2.	Différentielle.	$Xdx(e+fx^m+g(b+kx)^{\frac{\sigma}{\rho}}+\&c.)^\lambda(a+bx^n+c(b+kx)^{\frac{\pi}{\tau}}+\&c.)^\mu$ &c., X etant une fonction rationelle de x.
	Substitution.	$b+kx=z^\theta$, ou $x=\frac{z^\theta-b}{k}$; θ etant le plus petit nombre mesuré par ρ, τ, &c.; Z fonction rationelle de z trouvée en substituant $\frac{z^\theta-b}{k}$ au lieu de x dans X.
	Reduite.	$\frac{\theta}{k}Zz^{\theta-1}dz(e+f(\frac{z^\theta-b}{k})^m+gz^{\frac{\theta\sigma}{\rho}}+\&c.)^\lambda(a+b(\frac{z^\theta-b}{k})^n+cz^{\frac{\theta\pi}{\tau}}+\&c.)^\mu$ &c. rationelle, lorsque λ, μ, m, n, &c. sont des nombres entiers, ou zero.

TABLE DE REDUCTION DES DIFFÉRENT.[LES] IRRAT.[LES]		
3.	Differentielle	$X dx (e + f x^m + g (\frac{b+kx}{l+px})^{\frac{\sigma}{\rho}} + \&c.)^\lambda \times (a + b x^n + c (\frac{b+kx}{l+px})^{\frac{\pi}{\tau}} + \&c.)^\mu$; X fonction rationelle de x.
	Substitution.	$\frac{b+kx}{l+px} = z^\theta$, ou $x = \frac{lz^\theta - b}{k - pz^\theta}$; θ etant le plus petit nombre mesuré par ρ, τ, &c.; Z fonction rationelle de z trouvée en substituant $\frac{lz^\theta - b}{k - pz^\theta}$ au lieu de x dans X.
	Reduite.	$\theta \frac{kl - bp}{(k - pz^\theta)^2} Z z^{\theta - 1} dz (e + f (\frac{lz^\theta - b}{k - pz^\theta})^m + g z^{\frac{\theta\sigma}{\rho}} + \&c.)^\lambda . (a + b (\frac{lz^\theta - b}{k - pz^\theta})^n + c z^{\frac{\theta\pi}{\tau}} + \&c.)^\mu$ &c. rationelle lorsque λ, μ, m, n, &c. sont des nombres entiers ou zero.

TABLE DE REDUCTION DES DIFFÉRENT.[LES] IRRAT.[LES]

4.	Différentielle.	$x^{\frac{\pi n}{\tau}-1} dx\,(e+fx^n+gx^{2n}+bx^{3n}+$ &c.$)^\lambda.(a+bx^n+cx^{2n}+$&c.$)^\mu$ &c.
	Substitution.	$x^n = z^\tau$.
	Reduite.	$\frac{\tau}{n} z^{\pi-1} dz\,(e+fz^\tau+gz^{2\tau}+bz^{3\tau}+$ &c.$)^\lambda$. $(a+bz^\tau+cz^{2\tau}+$&c.$)^\mu$ &c. rationelle lorſque τ eſt un nombre entier; π, λ, μ, &c. des nombres entiers ou zero.
5.	Différentielle.	la meſme que la precedente en ſuppoſant ſucceſſivement $\tau=1$, $\tau=2$, $\tau=3$, &c.
	Substitution.	$x^n=z$, $x^n=z^2$, $x^n=z^3$, &c.
	Reduites.	$\frac{1}{n} z^{\pi-1} dz\,(e+fz+gz^2+$&c.$)^\lambda (a+bz+cz^2+$&c.$)^\mu$&c.; $\frac{2}{n} z^{\pi-1} dz\,(e+fz^2+gz^4+$&c.$)^\lambda (a+bz^2+cz^4+$&c.$)^\mu$ &c.; $\frac{3}{n} z^{\pi-1} dz(e+fz^3+gz^6+$&c.$)^\lambda\,(a+bz^3+cz^6+$&c.$)^\mu$ &c. rationelles, lorſque π, λ, μ, &c. ſont des nombres entiers ou zero.

TABLE DE REDUCTION DE DIFFÉRENT.[LES] IRRAT.[LES]		
6.	Différentielle.	$x^{\frac{\pi n}{\tau}-1} dx(e+fx^n+gx^{2n}+\&c.)^\lambda$. la même qu'au N.° 4. en faisant $\mu=0$.
	Substitution.	$x^n = z^\tau$.
	Reduite.	$\frac{\tau}{n} z^{\pi-1} dz(e+fz^\tau+gz^{2\tau}+\&c.)^\lambda$; rationelle lorsque τ est un nombre entier, & π, λ des nombres entiers, ou zero.
7.	Différentielles.	$x^{\frac{\pi n}{\tau}-1} dx(e+fx^n)^\lambda (a+bx^n+cx^{2n}+\&c.)^\mu$, la même qu'au n.° 4. en faisant $g=0$, $b=0$. $x^{\frac{\pi n}{\tau}-1} dx(e+fx^n)^\lambda (a+bx^n)^\mu$ la même en faisant $c=0$.
	Substitution.	$x^n=z^\tau$.
	Reduites.	$\frac{\tau}{n} z^{\pi-1} dz(e+fz^\tau)^\lambda(a+bz^\tau+cz^{2\tau}+\&c.)^\mu$; $\frac{\tau}{n} z^{\pi-1} dz(e+fz^\tau)^\lambda(a+bz^\tau)^\mu$ rationelles, lorsque τ est un nombre entier, & λ, μ des nombres entiers ou zero.

TABLE DE REDUCTION DES DIFFÉRENT.[LES] IRRAT.[LES]

8.

- Différentielle. $\{ x^{\pi n-1} dx (e+fx^n)^{\frac{\lambda}{\nu}}$.
- Substitution. $\{ e+fx^n = z^\nu$, ou $x^n = \frac{z^\nu - e}{f}$.
- Reduite. $\frac{\nu}{nf^\pi} z^{\lambda+\nu-1} dz (z^\nu - e)^{\pi-1}$, rationelle lorſque π eſt un nombre entier ou zero, & λ, ν des nombres entiers.

9.

- Différentielle. $\{ x^q dx (e+fx)^{\frac{\lambda}{\nu}}$.
- Substitution. $\{ e+fx = z^\nu$, ou $x = \frac{z^\nu - e}{f}$.
- Reduite. $\frac{\nu}{f^{q+1}} z^{\lambda+\nu-1} dz (z^\nu - e)^q$; rationelle lorſque q eſt un nombre entier ou zero, & λ, ν des nombres entiers.

TABLE DE REDUCTION DE DIFFÉRENT.[LES] IRRAT.[LES]

10.

Différentielle. $x^{\pi n-1}dx(e+fx^{n})^{\frac{\lambda}{\nu}}(a+bx^{n}+cx^{2n}+\&c.)^{\mu}$.

Substitution. $e+fx^{n}=z^{\nu}$, ou $x^{n}=\frac{z^{\nu}-e}{f}$.

Reduite. $\frac{\nu}{nf^{\pi}}z^{\lambda+\nu-1}dz(z^{\nu}-e)^{\pi-1}(a+\frac{b}{f}(z^{\nu}-e)+\frac{c}{f^{n}}(z^{\nu}-e)^{n}+\&c.)^{\mu}$; rationelle, lorſque π & μ ſont des nombres entiers ou zero, & λ, ν des nombres entiers.

11.

Différentielle. $x^{\pi n-1}dx(e+fx^{n})^{\frac{1}{2}}(a+bx^{n})^{-1}=\frac{x^{\pi n-1}dx\sqrt{e+fx^{n}}}{a+bx^{n}}$.

Substitution. $e+fx^{n}=z^{2}$, ou $x^{n}=\frac{z^{2}-e}{f}$.

Reduite. $\frac{2}{nf^{\pi-1}}\cdot\frac{z^{2}dz(z^{2}-e)^{\pi-1}}{af+b(z^{2}-e)}$; Rationelle, lorſque π eſt un nombre entier ou zero.

TABLE DE REDUCTION DE DIFFÉRENT.LES IRRAT.LES

12.

Différentielle. $x^{\pi n-1}dx(e+fx^n)^{-\frac{1}{2}}(a+bx^n)^{-1} = \dfrac{x^{\pi n-1}\,dx}{(a+bx^n)\sqrt{e+fx^n}}$.

Substitution. $e+fx^n = z^2$, ou $x^n = \dfrac{z^2-e}{f}$.

Reduite. $\dfrac{2dz(z^2-e)^{\pi-1}}{nf^{\pi-1}(af+b(z^2-e))}$; rationelle lorsque π est un nombre entier ou zero.

13.

Différentielle. $x^{\pi n-1}dx\left(\dfrac{e+fx^n}{a+bx^n}\right)^{\frac{\lambda}{\nu}}$.

Substitution. $\dfrac{e+fx^n}{a+bx^n} = z^\nu$, ou $x^n = \dfrac{az^\nu-e}{f-bz^\nu}$.

Reduite. $\dfrac{\nu}{n}z^{\lambda+\nu-1}dz \times \left(\dfrac{a(f-bz^\nu)(az^\nu-e)^{\pi-1}+b(az^\nu-e)^\pi}{(f+bz^\nu)^{\pi+1}}\right)$ rationelle, lorsque π est un nombre entier ou zero, & λ, ν des nombres entiers.

TABLE DE REDUCTION DES DIFFERENT.[LES] IRRAT.[LES]

14.

Différentielle. $x^{\pi n - 1} dx \sqrt{\frac{e + fx^n}{a + bx^n}}$.

Substitution. $\frac{e + fx^n}{a + bx^n} = z^2$, ou $x^n = \frac{az^2 - e}{f - bz^2}$.

Reduite. $\frac{2}{n} z^2 dz \left(\frac{a(f - bz^2)(az^2 - e)^{\pi - 1} + b(az^2 - e)^{\pi}}{(f - bz^2)^{\pi + 1}} \right)$; rationelle, lorsque π est un nombre entier, ou zero.

15.

Différentielle. $x^{\pi n - 1} dx \{(e + fx^n)(a + bx^n)\}^{\frac{\lambda}{2}}$.

Substitution. $x^n = \frac{ez^2 - a}{b - fz^2}$.

Reduite. $\frac{2(be - fa)^{\lambda + 1} z^{\lambda + 1} dz (ez^2 - a)^{\pi - 1}}{n(b - fz^2)^{\pi + \lambda + 1}}$ rationelle lorsque π est un nombre entier, ou zero, & λ impair.

16.

Différentielle. $x^{\pi n - 1} dx \sqrt{(e + fx^n)(a + bx^n)}$.

Substitution. $x^n = \frac{ez^2 - a}{b - fz^2}$.

Reduite. $\frac{2(be - fa)^2 z^2 dz (ez^2 - a)^{\pi - 1}}{n(b - fz^2)^{\pi + 2}}$ rationelle lorsque π est un nombre entier ou zero.

TABLE DE REDUCTION DES DIFFERENT.LES IRRAT.LES

17.

- Différentielle. $\dfrac{x^{\pi n - 1} dx}{\sqrt{(e + fx^n)(a + bx^n)}}$.
- Substitution. $x^n = \dfrac{ez^2 - a}{b - fz^2}$.
- Reduite. $\dfrac{2dz(ez^2 - a)^{\pi - 1}}{n(b - fz^2)^{\pi}}$ rationelle, π etant un nombre entier ou zero.

18.

- Différentielle. $x^{\pi n - 1} dx (ex^n + fx^{2n})^{\frac{\lambda}{2}}$.
- Substitution. $x^n = \dfrac{ez^2 - a}{b - fz^2}$.
- Reduite. $\dfrac{2e^{\pi + \lambda} z^{2\pi + \lambda - 1} dz}{n(1 - fz^2)^{\pi + \lambda + 1}}$; rationelle, lorſque π eſt un nombre entier ou zero, λ etant un nombre impair.

19.

- Différentielle. $x^{\pi n - 1} dx (e + fx^n + aax^{2n})^{\frac{\lambda}{2}}$.
- Substitution. $x^n = \dfrac{zz - e}{f - 2az}$.
- Reduite. $\dfrac{2dz(zz - e)^{\pi - 1}(fz - azz - ae)^{\lambda + 1}}{n(f - 2az)^{\pi + \lambda + 1}}$; rationelle, lorſque π eſt un nombre entier ou zero, λ etant un nombre impair.

TABLE DE REDUCTION DES DIFFÉRENT.^LES IRRAT.^LES

20.

Différentielle. $\left\{ x^{\pi n - 1} dx \left(bb + fx^n + gx^{2n} \right)^{\frac{\lambda}{2}} \right.$.

Substitution. $\left\{ x^n = \frac{2bz - f}{g - zz} \right.$.

Reduite. $\left\{ \frac{2dz(2bz - f)^{\pi - 1}(bg - fz + bzz)^{\lambda + 1}}{n(g - zz)^{\pi + \lambda + 1}} \right.$; rationelle lorſque π eſt un nombre entier ou zero; λ etant impair.

21.

Différentielle. $\left\{ x^{\pi n - 1} dx \left(fx^n - gx^{2n} - e \right)^{\frac{\lambda}{2}} \right.$.

Substitution. $\left\{ A = \frac{f \mp \sqrt{ff - 4ge}}{2g};\ B = \frac{f \pm \sqrt{ff - 4ge}}{2g} \right.$

$x^n = \frac{Bzz + A}{zz + 1}$.

Reduite. $\left\{ \frac{2g^{\frac{\lambda}{2}}(B - A)z^{\lambda + 1}dz(Bzz + A)^{\pi - 1}}{n(zz + 1)^{\pi + \lambda + 1}} \right.$; rationelle lorſque π eſt un nombre entier, ou zero; λ etant impair.

TABLE DE REDUCTION DES DIFFÉRENT.LES IRRAT.LES

22.

- Différentielle. Pdx; P ne contenant que des fonctions rationelles de x, & les radicaux $\sqrt{(aaxx+fx+e)^{\lambda}}$, $\sqrt{(aaxx+fx+e)^{\mu}}$, &c. du même trinome; λ, μ, &c. etant des nombres impairs.
- Substitution. $x=\frac{zz-e}{f-2az}$; Z fonction rationelle de z, qu'on trouve en substituant dans P, $\frac{zz-e}{f-2az}$ au lieu de x.
- Reduite. $\frac{2Zdz(fz-azz-ae)}{(f-2az)^2}$; rationelle.

23.

- Différentielle. Pdx; P ne contenant que des fonctions rationelles de x, & les radicaux $(fx-gx^2+e)^{\frac{\lambda}{2}}$, $(fx-gx^2+e)^{\frac{\mu}{2}}$ &c. du même trinome $fx-gx^2+e$; λ, μ, &c. etant des nombres impairs.
- Substitution. $x=\frac{2bz-f}{g-zz}$; Z fonction rationelle de z trouvée en substituant dans P, $\frac{2bz-f}{g-zz}$ au lieu de x.
- Reduite. $\frac{2Zdz(bg-fz+bzz)}{(g-zz)^2}$; rationelle.

TABLE DE REDUCTION DES DIFFÉRENT.[LES] IRRAT.[LES]

24.

Différentielle. Pdx; P ne contenant que des fonctions rationelles de x, & les radicaux $(fx - gx^2 - e)^{\frac{\lambda}{2}}$, $(fx - gx^2 - e)^{\frac{\mu}{2}}$, &c. du même trinome $fx - gx^2 - e$; λ, & μ etant des nombres impairs.

Substitution. $A = \frac{f \mp \sqrt{ff - 4ge}}{2g}$; $B = \frac{f \pm \sqrt{ff - 4ge}}{2g}$

$x = \frac{Bzz + A}{zz + 1}$; Z fonction rationelle de z, qu'on trouve en substituant $\frac{Bzz + A}{zz + 1}$ au lieu de x dans P.

Reduite. $\frac{2Zzdz(B - A)}{(zz + 1)^2}$; rationelle.

TABLE DE REDUCTION DES DIFFERENT.LES IRRAT.LES

25.	Différentielle.	$P\,dx$. P ne contenant que des fonctions rationelles de x, & les deux radicaux $(a+bx)^{\frac{\lambda}{2}}$, $(b+kx)^{\frac{\mu}{2}}$; λ & μ etant des nombres impairs.
	1re Substitution.	$a+bx=z^2$, ou $x=\frac{zz-a}{b}$; $b+kx=b-\frac{ka}{b}+\frac{kzz}{b}=e+gzz$, en faisant $b-\frac{ka}{b}=e$, & $\frac{k}{b}=g$; Z fonction de z qu'on trouve en substituant dans P, $\frac{zz-a}{b}$ au lieu de x, z^{λ} au lieu de $(a+bx)^{\frac{\lambda}{2}}$, & $(e+gzz)^{\frac{\mu}{2}}$ au lieu de $(b+kx)^{\frac{\mu}{2}}$.
	1re Reduite.	$\frac{2Zz\,dz}{b}$; irrationelle qui ne contient plus que le radical $(e+gzz)^{\frac{\mu}{2}}$.
	2e Substitution.	$z=\frac{e-yy}{2g^{\frac{1}{2}}y}$, lorsque g est positive, & $z=\frac{2e^{\frac{1}{2}}y}{g-yy}$, lorsque e est positive; Y fonction rationelle de y, qu'on trouve en substituant dans Z au lieu de z, $\frac{e-yy}{2g^{\frac{1}{2}}y}$, lorsque g est positive, & $\frac{2e^{\frac{1}{2}}y}{g-yy}$, lorsque e est positive.
	2e Reduite.	$\frac{-Y\,dy(ee-y^4)}{2bgy^3}$, lorsque g est positive, & $\frac{8eYy\,dy(g+yy)}{b(g-yy)^3}$; lorsque e est positive l'une & l'autre rationelle.

TABLE DE REDUCTION DES DIFFÉRENT.[LES] IRRAT.[LES]

26.

Différentielle. $\frac{P\,dx}{Q}$; $P = X(a+bx)^{\frac{\lambda}{2}}$, & $Q = X'(b+kx)^{\frac{\mu}{2}} \pm X''(l+px)^{\frac{\nu}{2}}$; X, X', X'' etant des fonctions rationelles de x; a, b, b, k, l, p des constantes réelles; λ, μ, ν des nombres impairs.

Substitution. En multipliant le numerateur $P\,dx$, & le denominateur Q par $X'(b+kx)^{\frac{\mu}{2}} \mp X''(l+px)^{\frac{\nu}{2}}$ on aura $\frac{P\,dx}{Q} =$

$$\frac{XX'dx(a+bx)^{\frac{\lambda}{2}}(b+kx)^{\frac{\mu}{2}}}{X'X'(b+kx)^{\mu} - X''X''(l+px)^{\nu}}$$

$$\frac{\mp XX''dx(a+bx)^{\frac{\lambda}{2}}(l+px)^{\frac{\nu}{2}}}{X'X'(b+kx)^{\mu} - X''X''(l+px)^{\nu}}$$

Reduite. On reduira en rationelles chacune de ces deux fractions par le N.° 25.

TABLE DE REDUCTION DES DIFFÉRENT.[LES] IRRAT.[LES]

27. Différentielle. $\frac{P\,dx}{Q}$; P etant une fonction rationelle de x & $Q = X + X'(a+bx)^{\frac{\lambda}{2}} \pm X''(b+kx)^{\frac{\mu}{2}}$, λ, & μ des nombres impairs.

Substitution. En multipliant le numerateur $P\,dx$, & le denominateur Q par $X + X'(a+bx)^{\frac{\lambda}{2}} \mp X''(b+kx)^{\frac{\mu}{2}}$, on aura $\frac{P\,dx}{Q} =$

$$\frac{PX\,dx + PX'\,dx(a+bx)^{\frac{\lambda}{2}} \mp PX''\,dx(b+kx)^{\frac{\mu}{2}}}{XX + 2XX'(a+bx)^{\frac{\lambda}{2}} + X'X'(a+bx)^{\lambda} - X''X''(b+kx)^{\mu}}$$

Reduite. On reduira cette fraction en rationelle par le N.° 26.

TABLE DE REDUCTION DE DIFFÉRENT.[les] IRRAT.[les]

28.

Différentielle. $P\,dx$; P ne contenant que des fonctions rationelles de x, & le radical

$$\sqrt[m]{a+A\left(\frac{g+hx}{k+lx}\right)^{\frac{1}{\delta}}}\text{, ou}$$

$$\sqrt[m]{a+b\sqrt[n]{c+A\left(\frac{g+hx}{k+lx}\right)^{\frac{1}{\delta}}}}\text{, ou}$$

$$\sqrt[m]{a+b\sqrt[n]{c+e\sqrt[p]{f+A\left(\frac{g+hx}{k+lx}\right)^{\frac{1}{\delta}}}}}$$

ou &c. δ, m, n, p, &c. etant des nombres entiers.

Substitution.

1.° $\sqrt[m]{a+A\left(\frac{g+hx}{k+lx}\right)^{\frac{1}{\delta}}}=z$, ou

2.° $\sqrt[m]{a+b\sqrt[n]{c+A\left(\frac{g+hx}{k+lx}\right)^{\frac{1}{\delta}}}}=z$,

ou &c. $=z$, ou bien.

1.° $x=\frac{kZ-g}{h-lZ}$, & $Z=\left(\frac{z^m-a}{A}\right)^{\delta}$.

2.° $x=\frac{kZ'-g}{h-lZ'}$; $Z=\left(\frac{z^m-a}{b}\right)^{n}$, & $Z'=\left(\frac{Z-c}{A}\right)^{\delta}$.

Reduite. En substituant ces valeurs rationelles de x dans la différentielle proposée, on la rendra rationelle.

CCI.

REMARQUE. Puiſque nous avons demontré dans le Chapitre precedent, que toute fraction rationelle différentielle peut toujours ſe reduire a la quadrature d'une des ſections coniques, il eſt clair que toutes les différentielles affectées de radicaux, qu'on peut reduire par transformation a des fractions rationélles, comme nous avons fait dans ce Chapitre, ſont intégrables par la quadrature de quelque ſection conique. On pourroit par les principes etablis dans les deux derniers Chapitres conſtruire des tables generales d'un uſage trés commode, pour trouver algebriquement, ou par les tables ordinaires des logarithmes, & celles des ſinus & tangentes les intégrales des différentielles rationelles, & des irrationelles reductibles. On n'auroit pour cela qu'a etendre les deux Tables que Newton a donné dans ſon traité de la quadrature des courbes, & ramener ſes formules irrationelles aux rationelles par noſtre table precedente de reduction, & reduire enfin toutes les intégrales qui ſuppoſent les quadratures de l'hyperbole, & de l'ellipſe aux logarithmes, & aux arcs de cercle pris dans les Tables ordinaires. Nous donnerons icy quelques exemples de ces reductions en parcourant les deux Tables de Newton.

La premiere Table ne contient que quatre formules generales de différentielles, dont les intégrales sont algebriques. Les deux premieres sont $x^{n-1}dx$, & $x^{n-1}dx \times (e+fx^n)^{-2}$, qui ne sont aucune difficulté; les deux autres sont $x^{\pi n-1}dx(e+fx^n)^{\frac{1}{2}}$, & $x^{\pi n-1}dx(e+fx^n)^{-\frac{1}{2}}$, en supposant que π est un nombre entier positif. Ces deux dernieres formules sont deux Cas particuliers de la formule 8.e de la Table precedente de reduction $x^{\pi n-1}dx(e+fx^n)^{\frac{\lambda}{\nu}}$; car on a ces deux cas en supposant $\nu=2$, & $\lambda=\pm 1$. Or en faisant $e+fx^n=z^\nu$, ou $x^n=\frac{z^\nu-e}{f}$, nostre formule devient $\frac{\nu}{nf^\pi}z^{\lambda+\nu-1}dz \times (z^\nu-e)^{\pi-1}$; différentielle rationelle, lorsque π est un nombre entier quelconque, ou zero, λ, & ν etant des nombres entiers positifs, ou negatifs. L'intégrale de cette différentielle est evidemment algebrique, lorsque π etant un nombre entier positif, $\lambda+\nu-1$ est aussi un nombre entier positif, ou zero. Par exemple. Si on suppose $\pi=3$, $\nu=2$, $\lambda=1$, on aura le 3.e Cas de la troisieme formule de Newton, qui est $x^{3n-1}dx \times (e+fx^n)^{\frac{1}{2}}$, dont la reduite en supposant $e+fx^n=z^2$

eſt $\frac{2}{nf^3} z^2 dz (z^2 - e)^2 = \frac{2}{nf^3} (z^6 dz - 2ez^4 dz + eez^2 dz)$,

dont l'intégrale algebrique eſt $\frac{2}{nf^3} \left(\frac{z^7}{7} - \frac{2ez^5}{5} + \frac{eez^3}{3}\right) =$

$\frac{2z^3}{nf^3} \left(\frac{15z^4 - 42ez^2 + 35ee}{105}\right) = \frac{2z^3}{nf^3} \left(\frac{8ee - 12fex^n + 15f^2x^{2n}}{105}\right)$

en remettant $e + fx^n$ au lieu de z^2; ce qui eſt la même intégrale que celle des Tables de Newton.

On pourroit augmenter cette premiere Table en y inſerant les cas, ou dans les différentielles $x^{\pi n - 1} dx \times (e + fx^n)^{\frac{\lambda}{\nu}}$, π eſt un nombre entier poſitif ſucceſſivement $= 1, = 2, = 3$ &c. ou zero, & $\lambda + \nu - 1$ un nombre entier poſitif ou zero, comme il arrive.

1.° Lorſque $\lambda = 1$, & ν ſucceſſivement $= 2, = 3, = 4$, &c.
2.° Lorſque $\lambda = 2$, & ν ſucceſſivement $= 2, = 3, = 4$, &c.
3.° Lorſque $\lambda = -1$, & ν ſucceſſivement $= 2, = 3, = 4$, &c.
4.° Lorſque $\lambda = -2$, & ν ſucceſſivement $= 3, = 5, = 7$, &c.
5.° &c.

on peut rendre cette Table plus etendue a l'infini, en introduiſant les cas ou les formules de noſtre Table de reduction peuvent s'intégrer algebriquement; comme ſont la 4.e formule, lorſque, τ etant un nombre entier poſitif, π, λ, μ ſont auſſi des nombres entiers poſitifs, ou zero; les 5.e, 6.e, & 7.e formules dans les mêmes ſuppoſitions; la 9.e, lorſque, ν etant un nombre entier

positif, q & $\lambda+\nu-1$ sont aussi des nombres entiers positifs ou zero; la 10.e, lorsque π & ν sont des nombres entiers positifs, & μ, & $\lambda+\nu-1$ aussi des nombres entiers positifs ou zero.

La seconde Table de Newton renferme onze formules generales rationelles ou reductibles par nostre Table, dont les intégrales dependent des quadratures de l'hyperbole & de l'ellipse, & peuvent par consequent se trouver par les Tables ordinaires des logarithmes, ou par celles des sinus & tangentes. Nous en donnerons quelques exemples.

EXEMPLES. Tirés de la 1.ere, 3.e, & 4.e formules generales de la seconde Table de Newton.

La 1.ere est $x^{\pi n-1}dx(e+fx^n)^{-1}$, π etant un nombre impair positif. La 3.e est $x^{\pi n-1}dx(e+fx^n)^{\frac{1}{2}}$, π etant un nombre entier negatif ou zero. La 4.e est $x^{\pi n-1}dx(e+fx^n)^{-\frac{1}{2}}$, π etant encore un nombre entier negatif, ou zero. Ces trois formules ne sont que des cas particuliers de la formule 8.^{e} de nôtre Table $x^{\pi n-1}dx(e+fx^n)^{\frac{\lambda}{\nu}}$, dont la reduite, en supposant $e+fx^n=z^\nu$ est $\frac{\nu}{nf^\pi}z^{\lambda+\nu-1}dz(z^\nu-e)^{\pi-1}$, rationelle, lorsque π est un nombre entier quelconque, ou zero, λ, ν, etant des nombres entiers quelconques. Donc

Donc la premiere formule $x^{\pi n-1}dx(e+fx^n)^{-1}$, en faiſant dans noſtre formule 8.^{e} $\lambda=-1$, & $\nu=1$ aura pour reduite $\frac{1}{nf^\pi}z^{-1}dz(z-e)^{\pi-1}$ &, ſi on ſuppoſe $\pi=1$, cette reduite ſera $\frac{1}{nf}z^{-1}dz$ dont l'intégrale eſt $\frac{1}{nf}l.z$; $l.$ exprime le logarithme hyperbolique ou tiré de la logarithmique dont la ſouſtangente eſt l'unité; & cette intégrale ſera $\frac{N}{nf}\cdot l.z$, en prenant $l.z$ dans les Tables ordinaires, & en ſuppoſant que, la ſouſtangente de la logarithmique de ces Tables etant M, on ait $N=\frac{1}{M}$, comme nous l'avons demontré ailleurs (Art. XXXII.). Si on ſuppoſe $\pi=2$, la reduite ſera $\frac{1}{nf^2}z^{-1}dz\times(z-e)=\frac{1}{nf^2}(dz-\frac{edz}{z})$ dont l'intégrale eſt $\frac{z}{nf^2}-\frac{e}{nf^2}\cdot l.z$ hyperbolique $=\frac{z}{nf^2}-\frac{eN}{nf^2}l.z$ pris dans les Tables ordinaires. Si on ſuppoſe $\pi=3$, la reduite ſera $\frac{1}{nf^3}z^{-1}dz(z-e)^2=\frac{1}{nf^3}(zdz-2edz+\frac{eedz}{z})$, dont l'intégrale eſt $\frac{1}{nf^3}(\frac{z^2}{2}-2ez+eeN.l.z)$.

Pour la troiſieme formule de Newton $x^{\pi n-1}dx(e+fx^n)^{\frac{1}{2}}$, en faiſant dans noſtre formule 8^e $\lambda=1$, $\nu=2$,

& $c + fx^n = z^2$, elle aura pour reduite $\frac{2}{nf^{\pi}} z^2 dz (z^2 - e)^{\pi - 1}$, & si on suppose $\pi = o$, cette reduite sera $\frac{2}{n} . \times \frac{z^2 dz}{z^2 - e} = \frac{2}{n} \left(dz + \frac{e\,dz}{z^2 - e}\right)$. Or l'intégrale de dz est z, & celle de $\frac{e\,dz}{z^2 - e}$ se trouve par les logarithmes, lorsque e est positif $= + aa$; Car alors $\frac{e\,dz}{z^2 - e} = \frac{aa\,dz}{z^2 - aa} = \frac{aa\,dz}{(z + a)(z - a)} = \frac{\frac{1}{2} a\,dz}{z - a} - \frac{\frac{1}{2} a\,dz}{z + a}$, dont l'intégrale est $\frac{1}{2} a L.(z - a) - \frac{1}{2} a L.(z + a) = \frac{1}{2} a L\left(\frac{z - a}{z + a}\right) = \frac{1}{2} a N. \times L\left(\frac{z - a}{z + a}\right)$, en prenant ce dernier logarithme dans les Tables ordinaires, mais lorsque e est negatif $= - aa$, la différentielle $\frac{e\,dz}{z^2 - e}$ sera $- \frac{aa\,dz}{z^2 + aa}$. Or l'intégrale de cette différentielle est $- A$; A etant un arc de cercle au rayon a dont la tangente est z (Art. LII.).

Pour trouver cet arc A par les Tables ordinaires des sinus & tangentes, dans lesquelles on suppose que le rayon du cercle est l'unité, on dira (Art. XLIV.) le rayon a est au rayon 1, comme la tangente z de l'arc A est a la tangente $\frac{z}{a}$ prise dans les Tables d'un arc B semblable a l'arc A, ou d'un egal nombre de

degrés. On aura donc le nombre de degrés de l'arc B; on determinera ſa longueur, laquelle ſoit $=b$, & on dira 1 eſt a b, comme a eſt a l'arc $A=ab$; Par conſequent l'intégrale de $\frac{-aadz}{zz+aa}$ ſera $-ab$.

Ainſi dans le premier cas de e poſitif $=aa$, l'intégrale de la différentielle $\frac{2}{n} \cdot \frac{z^2dz}{zz-e}$ ſera $\frac{2z}{n} + \frac{a}{n} \times N\,l. \left(\frac{z-a}{z+a}\right)$; & dans le ſecond cas de e negatif $= -aa$, cette intégrale ſera $\frac{2z}{n} - \frac{2ab}{n}$. On operera de la même maniere dans tous les cas, ou on voudra reduire les logarithmes & les arcs de cercle aux Tables ordinaires. On pourra conſtruire en cette maniere des Tables beaucoup plus utiles & plus commodes qu'aucune conſtruction par les courbes.

EXEMPLE tiré de la ſeconde formule de la ſeconde Table de Newton. $x^{\frac{\pi n}{2}-1}dx(e+fx)^{-1}$, π etant un nombre entier impair & poſitif: cette formule eſt un Cas de la formule 7e. de noſtre Table de Reduction $x^{\frac{\pi n}{2}-1}dx(e+fx^n)^\lambda.(a+bx^n+cx^{2n})^\mu$, en faiſant $\mu=0$; $\lambda=-1$; $\tau=2$; $x^n=z^2$, ſa reduite ſera $\frac{2}{n}z^{\tau-1}dz(e+fz^2)^{-1}$; ſi on ſuppoſe ſucceſſivement

$\pi = 1$, $\pi = 3$, $\pi = 5$, *&c.*, les reduites correspondantes seront $\frac{2}{n} \cdot \frac{dz}{e+fz^2}$, $\frac{2}{n} \cdot \frac{z^2 dz}{e+fz^2}$, $\frac{2}{n} \cdot \frac{z^4 dz}{e+fz^2}$, &c., dont on trouvera les intégrales, comme dans le dernier exemple; car on aura $\frac{dz}{e+fz^2} = \frac{\frac{1}{f} dz}{\frac{e}{f} + z^2}$; $\frac{z^2 dz}{e+fz^2} = \frac{1}{f} dz - \frac{\frac{e}{ff} dz}{z^2 + \frac{e}{f}}$; &c.

EXEMPLE tiré de la formule 6e de la seconde Table de Newton. $x^{\frac{\pi n}{2} - 1} dx (e + f x^n + g x^{2n-1})^{-1}$, π etant un nombre impair positif. Cette formule est encore un Cas particulier de nôtre formule 7e en faisant $\lambda = o$, $\mu = -1$, $\tau = 2$, $x^n = z^2$; sa reduite sera

$$\frac{2}{n} z^{\pi - 1} dz (e + fz^2 + gz^4)^{-1} = \frac{\frac{2}{n} z^{\pi - 1} dz}{e + fz^2 + gz^4} =$$

$$\frac{\frac{2}{ng} z^{\pi - 1} dz}{\frac{e}{g} + \frac{f}{g} z^2 + z^4} = \frac{2}{ng} \cdot \frac{dz}{\frac{e}{g} + \frac{f}{g} z^2 + z^4}$$, lorsque $\pi = 1$, & $=$

$$\frac{2}{ng} \cdot \frac{z^2 dz}{\frac{e}{g} + \frac{f}{g} z^2 + z^4}$$, lorsque $\pi = 3$, &c. différentielles qu'on intégre après avoir trouvé les facteurs réels du denominateur, comme nous avons expliqué dans le Chapitre precedent, & dont les intégrales ne dependent que des logarithmes, & des arcs de cercle.

Enfin on peut etendre autant qu'on voudra la seconde Table de Newton, eu y inserant toutes les dif-

férentielles rationelles, & toutes les irrationelles reductibles dont les intégrales dependent des logarithmes & des arcs de cercle.

En general on connoitra par nos Tables si les différentielles irrationelles qui y sont comprises sont réductibles par cette methode a des différentielles rationelles, & par consequent intégrables par les quadratures des sections coniques. Par exemple, soit a examiner la formule différentielle $\frac{x^{\nu}dx}{\sqrt{a+bx^{2}+cx^{4}}}$; on la ramene a la formule 20ᵉ. de nostre Table $x^{\pi n-1}dx(bb+fx^{n}+gx^{2n})^{\frac{\lambda}{2}}$, en faisant $\lambda=-1$, $n=2$, $2\pi-1=\nu$, ou $2\pi=\nu+1$. D'ou l'on voit que 2π etant necessairement un nombre pair, si π est un entier, il faut que ν soit impair; donc dans le cas de ν impair, cette différentielle ne peut dependre que des quadratures des sections coniques. Mais si ν est un nombre pair, & par consequent $\nu+1$ impair, alors π ne-peut être un entier, & la différentielle est irreductible par nos Tables, & par aucune autre methode connüe.



CHAPITRE VI.

Des methodes de Newton dans le traité de la quadrature des courbes pour trouver l'intégrale de la différentielle (Pdx), P etant une fonction quelconque de x.

Nous diviserons ce Chapitre en trois articles. Dans le premier nous expliquerons la Theorie generale de Newton. Nous traiterons dans le second des préparations necessaires pour l'application de cette Theorie aux différentielles proposées. Enfin nous ferons cette application dans le troisieme Article.

ARTICLE PREMIER.

De la Theorie generale de Newton pour trouver l'intégrale $S.Pdx$.

CCII.

On peut considerer la différentielle Pdx absolument, & en chercher l'intégrale sans la rapporter aux quadratures des courbes. On peut aussi la regarder comme l'element, ou la différentielle de l'aire d'une courbe, dont l'abscisse est x, & l'ordonée perpendiculaire y

$=P$; & alors l'intégrale $S.\ P\,dx$, ou $S.\ y\,dx$ sera egale a l'aire de cette courbe. Cette derniere maniere, qui est celle de Newton a plusieurs avantages; premierement pour trouver l'intégrale $S.\ y\,dx$ par les quadratures des courbes les plus simples; Secondement pour la rapporter aux courbes dont les quadratures sont deja connues d'ailleurs; Troisiemement pour expliquer plusieurs cas d'intégrations, qui sans cela pourroient être embarassans. On connoitra ces avantages par toute la suite de ce Chapitre.

CCIII.

PROBLEME I. Trouver autant d'intégrales qu'on voudra de la différentielle $P\,dx$, ou trouver autant de courbes quarrables qu'on voudra.

PREMIERE SOLUTION. Prenez autant de fonctions de x qu'il vous plaira, avec des coefficiens & des exposans indeterminés. Supposé qu'une de ces fonctions soit X. Prenez sa différentielle, laquelle soit $X'dx$, X' etant encore une fonction de x; en faisant $X'dx = P\,dx$, vous aurez $P = X'$ & $S.\ P\,dx = X$. *C. Q. F. T.*

SECONDE SOLUTION. Si on considere $P\,dx$, ou $y\,dx$ comme l'element de l'aire d'une courbe, dont l'abscisse est x, & l'ordonnée perpendiculaire y; ayant pris une fonction quelconque X de l'abscisse x & sa différentielle $X'dx$, on fera $X'dx = y\,dx$, & divisant par

dx, on aura $X' = y$, equation a la courbe dont l'aire ſera $S.\, y\,dx = X$. *C. Q. F. T.*

EXEMPLE I. Supposé qu'on ait pris la fonction $X = ax^n$; en différentiant on aura $X'dx = nax^{n-1}dx$; $X' = nax^{n-1}$; $S.\,nax^{n-1}dx = X = ax^n$, & $y = nax^{n-1}$ ſera l'equation a la courbe dont l'aire eſt ax^n.

EXEMPLE II. Supposé qu'on ait pris pour X la fonction $ax^n + bA$, A etant un arc de cercle au rayon r, & dont la tangente ſoit x; en différentiant on aura $X'dx = y\,dx = nax^{n-1}dx + \frac{brrdx}{rr+xx}$; $y = nax^{n-1} + \frac{brr}{rr+xx}$, & $y(rr+xx) = nax^{n+1} + narrx^{n-1} + brr$, equation a la courbe dont l'aire eſt $ax^n + bA$.

EXEMPLE III. Soit $X = ax^n + b\,l.x$, $l.x$ etant le logarithme hyperbolique de x. En différentiant on aura $X'dx = y\,dx = nax^{n-1}dx + \frac{bdx}{x}$; $X' = y = nax^{n-1} + \frac{b}{x}$, & $yx = nax^n + b$, equation a la courbe dont l'aire $S.\,y\,dx = ax^n + b\,l.x$.

Ce premier Probleme, quoique tres ſimple, fournit un principe d'invention dont Newton & pluſieurs autres Auteurs celebres aprés luy ont fait un trés grand uſage dans le calcul intégral. On s'en ſert pour la conſtruction des Tables des différentielles, & de leurs intégrales;

grales; une différentielle quelconque etant proposée, on peut chercher son intégrale, en prenant a discretion une intégrale avec des coefficiens & des exposants indeterminés, & comparant la différentielle avec la proposée. Tout consiste a bien choisir son intégrale & a la préparer comme il convient, pour pouvoir comparer sa différentielle avec la proposée, comme nous l'expliquerons dans ce chapitre.

CCIV.

THEOREME I. Supposé que $R = e + fx^n + gx^{2n} + hx^{3n} +$ &c., & que l'intégrale ou l'aire $S.ydx = x^\theta R^\lambda$, on aura l'ordonnée.

$$y = \left(\theta e \begin{matrix} +\theta \\ +\lambda n \end{matrix} \Big\} fx^n \begin{matrix} +\theta \\ +2\lambda n \end{matrix} \Big\} gx^{2n} \begin{matrix} +\theta \\ +3\lambda n \end{matrix} \Big\} hx^{3n} + \text{\&c.} \right) x^{\theta - 1} R^{\lambda - 1}$$

DEMONSTRATION. Puisque $x^\theta R^\lambda = S.ydx$, en différentiant de part & d'autre, on aura $\theta x^{\theta - 1} R^\lambda dx + \lambda x^\theta R^{\lambda - 1} dR = ydx$; en ecrivant $R.R^{\lambda - 1}$ pour R^λ dans le premier terme de cette equation, & $x.x^{\theta - 1}$ pour x^θ dans le second terme, ces expressions etant manifestement equivalentes, on aura $(\theta R dx + \lambda x dR) \times x^{\theta - 1} R^{\lambda - 1} = ydx$. Or par la supposition $dR = nfx^{n-1}dx + 2ngx^{2n-1}dx + 3nhx^{3n-1}dx +$ &c.;

Donc ſi on ſubſtitue les valeurs de R & de dR dans l'equation $(\theta R dx + \lambda x dR) x^{\theta - 1} R^{\lambda - 1} = y dx$, & qu'on diviſe par dx, on aura l'ordonnée.

$$y = \left(\theta e \left.\begin{matrix}+\theta \\ +\lambda n\end{matrix}\right\} f x^n \left.\begin{matrix}+\theta \\ +2\lambda n\end{matrix}\right\} g x^{2n} \left.\begin{matrix}+\theta \\ +3\lambda n\end{matrix}\right\} h x^{3n} + \&c.\right) x^{\theta - 1} R^{\lambda - 1}$$

C. Q. F. D.

CCV.

THEOREME II. Suppoſé que $R = e + f x^n + g x^{2n} + h x^{3n} + \&c.$, que $S = k + l x^n + m x^{2n} + n' x^{3n} + \&c.$, & que l'intégrale ou l'aire $S.y dx = x^\theta R^\lambda S^\mu$, on aura l'ordonnée.

$$y = \left\{\begin{array}{llll} \theta e k & \left.\begin{matrix}+\theta \\ +\lambda n\end{matrix}\right\} f k x^n & \left.\begin{matrix}+\theta \\ +2\lambda n\end{matrix}\right\} g k x^{2n} & \left.\begin{matrix}+\theta \\ +3\lambda n\end{matrix}\right\} h k x^{3n} + \&c. \\ & \left.\begin{matrix}+\theta \\ +\mu n\end{matrix}\right\} e l x^n & \left.\begin{matrix}+\theta \\ +\lambda n \\ +\mu n\end{matrix}\right\} f l x^{2n} & \left.\begin{matrix}+\theta \\ +2\lambda n \\ +\mu n\end{matrix}\right\} g l x^{3n} + \&c. \\ & & \left.\begin{matrix}+\theta \\ +2\mu n\end{matrix}\right\} e m x^{2n} & \left.\begin{matrix}+\theta \\ +\lambda n \\ +2\mu n\end{matrix}\right\} f m x^{3n} + \&c. \\ & & & \left.\begin{matrix}+\theta \\ +3\mu n\end{matrix}\right\} e n' x^{3n} + \&c. \end{array}\right\} x^{\theta - 1} R^{\lambda - 1} S^{\mu - 1}$$

DEMONSTRATION. Puiſque $x^\theta R^\lambda S^\mu = S.y dx$, en différentiant de part, & d'autre, on aura $y dx = \theta dx.$ $x^{\theta - 1} R^\lambda S^\mu + \lambda dR . x^\theta R^{\lambda - 1} S^\mu + \mu dS . x^\theta R^\lambda S^{\mu - 1} =$

$(\theta R S dx + \lambda x S dR + \mu x R dS) x^{\theta - 1} R^{\lambda - 1} S^{\mu - 1}$.
Or si au lieu de R, S, dR, dS on substitue leurs valeurs dans la partie de l'equation renfermée dans la parenthese, & qu'on divise toute l'equation par dx, on trouvera la valeur de l'ordonnée y telle qu'elle est enonçée cy-dessus.

On peut continuer ce theoreme a l'infini, en supposant R, S comme cy-dessus, $T = p + q x^n + r x^{2n} + s x^{3n} +$ &c.; $S. y dx = x^\theta R^\lambda S^\mu T^\nu$, & ainsi de suite.

CCVI.

LEMME. Si l'on a plusieurs différentielles $P dx + Q dx + R dx +$ &c. $= (P + Q + R) dx$, & qu'on fasse $P + Q + R +$ &c. $= Z$, l'intégrale $S. Z dx$ sera egale a la somme des intégrales $S. P dx + S. Q dx + S. R dx +$ &c., cest une des premieres regles du calcul intégral, d'ou l'on conclut que, si l'on a plusieurs courbes, qui ayent toujours la même abscisse x, & des ordonnées perpendiculaires y, y', y'', y''', &c., & qu'on decrive une autre courbe, dont l'ordonnée Y soit aussi toujours perpendiculaire a la même abscisse x, & egale a la somme des autres ordonnées $y + y' + y'' + y''' +$ &c., l'aire de cette courbe $S. Y dx$ sera egale a la somme des aires des autres courbes $S. y dx + S. y' dx + S. y'' dx + S. y''' dx$ &c.

CCVII.

THEOREME III. Supposé que l'abſciſſe d'une courbe ſoit x; que $R = e + fx^n + gx^{2n} + hx^{3n} + \&c.$, & que l'ordonnée perpendiculaire $y = x^{\theta - 1} R^{\lambda - 1} (a + bx^n + cx^{2n} + d'x^{3n} + ex^{4n} + \&c.)$, en faiſant $\frac{\theta}{n} = r$, $r + \lambda = s$, $s + \lambda = t$, $t + \lambda = u$, $u + \lambda = z$ &c. on aura l'aire de la courbe $S. ydx = x^{\theta} R^{\lambda} \Big(\frac{\frac{1}{n} a}{re} +$

$$\frac{\frac{1}{n} b - sfA}{(r+1)e} x^n + \frac{\frac{1}{n} c - (s+1)fB - tgA}{(r+2)e} x^{2n} +$$

$$\frac{\frac{1}{n} d' - (s+2)fC - (t+1)gB - uhA}{(r+3)e} x^{3n} +$$

$$\frac{\frac{1}{n} e - (s+3)fD - (t+2)gC - (u+1)hB - zkA}{(r+4)e} + \&c. \Big);$$

Les lettres A, B, C, D deſignant les coefficients donnés de chaque terme dans cette ſuite avec leurs ſignes $+$ & $-$, c'eſt a dire que $A = \frac{\frac{1}{n} a}{re}$ qui eſt le premier terme de la ſuite ou x ne ſe trouve pas; $B = \frac{\frac{1}{n} b - sfA}{(r+1)e}$ coefficient du ſecond terme, ou eſt x^n $C = \frac{\frac{1}{n} c - (s+1)fB - tgA}{(r+2)e}$ coefficient du 3ᵉ terme, ou l'on a x^n, & ainſi des autres.

DEMONSTRATION. Si on ſuppoſe que l'aire d'une courbe dont l'abſciſſe eſt x, & l'ordonnée perpendiculaire V ſoit $x^\theta R^\lambda$, ou que $x^\theta R^\lambda = S. V. dx$; en multipliant de part & d'autre par une conſtante quelconque A, on aura $Ax^\theta R^\lambda = A. S. V dx = S. AV dx$, & par le Theoreme I. (Art. CCIV.) on aura $V = \left(\theta e \begin{matrix}+\theta\\+\lambda n\end{matrix}\right\} f x^n \begin{matrix}+\theta\\+2\lambda n\end{matrix}\Big\} g x^{2n} \begin{matrix}+\theta\\+3\lambda n\end{matrix}\Big\} h x^{3n} + \&c. \Big) x^{\theta - 1} R^{\lambda - 1}$, & en faiſant $\frac{AV}{1} = y'$ ordonnée d'une courbe dont l'aire ſoit $Ax^\theta R^\lambda$, on aura $y' = AV = \Big(A\theta e \begin{matrix}+\theta\\+\lambda n\end{matrix}\Big\} Af x^n \begin{matrix}+\theta\\+2\lambda n\end{matrix}\Big\} Ag x^{2n} \begin{matrix}+\theta\\+3\lambda n\end{matrix}\Big\} Ah x^{3n} + \&c. \Big) x^{\theta - 1} R^{\lambda - 1}$.

Maintenant ſi dans l'aire $Ax^\theta R^\lambda$, & dans la valeur de y' on ecrit $\theta + n$ au lieu de θ, la conſtante B au lieu de A, & l'ordonnée y'' au lieu de y' on aura pour l'aire de la courbe $Bx^{\theta + n} R^\lambda = S. B y'' dx$, & l'ordonnée $y'' = \Big(\overline{\theta + n}. Be \begin{matrix}+\theta+n\\+\lambda n\end{matrix}\Big\} Bf x^n \begin{matrix}+\theta+n\\+2\lambda n\end{matrix}\Big\} Bg x^{2n} + \&c. \Big) x^{\theta + n - 1} R^{\lambda - 1} = \Big(\overline{\theta + n}. Be x^n \begin{matrix}+\overline{\theta+n}\\+\lambda n\end{matrix}\Big\} Bf x^{2n} \begin{matrix}+\overline{\theta+n}\\+2\lambda n\end{matrix}\Big\} Bg x^{3n} + \&c. \Big) x^{\theta - 1} R^{\lambda - 1}$. On prouve de la même maniere que, l'aire de la courbe etant $Cx^{\theta + 2n} R^\lambda$,

& son ordonnée y''', on aura $y''' = \Big(\overline{\theta + 2n}.Cex^{2n} \left.\begin{matrix} + \overline{\theta + 2n} \\ + \lambda n \end{matrix}\right\} Cfx^{3n} \left.\begin{matrix} + \theta + n \\ + 2\lambda n \end{matrix}\right\} Cgx^{4n} + \&c.\Big) x^{\theta - 1} R^{\lambda - 1}$;

& de même si l'aire est $Dx^{\theta + 3n} R^{\lambda}$, & l'ordonnée y'''', on aura $y'''' = \Big(\overline{\theta + 3n}.Dex^{3n} \left.\begin{matrix} + \overline{\theta + 3n} \\ + \lambda n \end{matrix}\right\} Dfx^{4n} \left.\begin{matrix} + \theta + 3n \\ + 2\lambda n \end{matrix}\right\} Dgx^{5n} + \&c.\Big) x^{\theta - 1} R^{\lambda - 1}$; & ainsi de suite. La somme de toutes ces ordonnées $y' + y'' + y''' + y'''' + \&c.$ sera donc $=$

$$\left\{\begin{matrix} \theta eA \left.\begin{matrix} + \theta \\ + \lambda n \end{matrix}\right\} Afx^{n} \left.\begin{matrix} + \theta \\ + 2\lambda n \end{matrix}\right\} Agx^{2n} \left.\begin{matrix} + \theta \\ + 3\lambda n \end{matrix}\right\} Ahx^{3n} + \&c. \\ + \overline{\theta + n}.Bex^{n} \left.\begin{matrix} + \overline{\theta + n} \\ + \lambda n \end{matrix}\right\} Bfx^{2n} \left.\begin{matrix} + \overline{\theta + n} \\ + 2\lambda n \end{matrix}\right\} Bgx^{3n} + \&c. \\ + \overline{\theta + 2n}.Cex^{2n} \left.\begin{matrix} + \overline{\theta + 2n} \\ + \lambda n \end{matrix}\right\} Cfx^{3n} + \&c. \\ + \overline{\theta + 3n}.Dex^{3n} + \&c. \end{matrix}\right\} x^{\theta - 1} R^{\lambda - 1}$$

& la somme des aires correspondantes a ces ordonnées sera $Ax^{\theta} R^{\lambda} + Bx^{\theta + n} R^{\lambda} + Cx^{\theta + 2n} R^{\lambda} + Dx^{\theta + 3n} R^{\lambda} + \&c. = (A + Bx^{n} + Cx^{2n} + Dx^{3n} + \&c.)\, x^{\theta} R^{\lambda}$.
Or si on egale la somme des ordonnées $y' + y'' + y''' + \&c.$ a l'ordonnée y, ou $x^{\theta - 1} R^{\lambda - 1} (a + bx^{n} + cx^{2n} + dx^{3n} + \&c.)$, la somme des aires $(A + Bx^{n} + Cx^{2n} + Dx^{3n} + \&c.)\, x^{\theta} R^{\lambda}$ sera egale a l'aire de la courbe,

dont l'ordonnée eſt y (Art. CCVI.). Si on egale donc tous les termes a, bx^n, cx^{2n}, &c. de l'ordonnée y aux termes correſpondans de la ſomme des ordonnées y', y'', y''', &c., on aura

$$a = \theta c A$$
$$b = (\theta + \lambda n) f A + (\theta + n) c B$$
$$c = (\theta + 2\lambda n) g A + (\theta + n + \lambda n) f B + (\theta + 2n) e C$$
&c. = &c.

d'où l'on deduit

$A = \frac{a}{\theta c} = \frac{\frac{1}{n} a}{r c}$, en faiſant $\frac{\theta}{n} = r$.

$B = \frac{b - (\theta + \lambda n) f A}{(\theta + n) e} = \frac{\frac{1}{n} b - s f A}{(r + 1) e}$, en faiſant de plus $r + \lambda = s$.

$C = \frac{c - (\theta + 2\lambda n) g A - (\theta + n + \lambda n) f B}{(\theta + 2n) e} =$

$\frac{\frac{1}{n} c - (s + 1) f B - t g A}{(r + 2) e}$, en faiſant $s + \lambda = t$, & ainſi de ſuite a l'infini. En ſubſtituant ces valeurs de A, B, C, D, &c. dans l'aire $x^\theta R^\lambda (A + B x^n + C x^{2n} + D x^{3n} + \text{\&c.})$ on aura la ſuite propoſée dans le theoreme egale a l'aire de la courbe, dont l'ordonnée eſt y. *C. Q. F. D.*

Si on vouloit reduire l'expreſſion de l'aire en une ſuite reguliere, il ne faudroit pour cela, que ſubſtituer a la place des coefficiens A, B, C, D, &c. leurs valeurs deduites des equations precedentes, on auroit.

$$x^{\theta} R^{\lambda} \times \frac{\frac{1}{n} a}{rc}$$

$$+ \frac{\frac{1}{n} b - sfA}{\overline{r+1}.e} x^{n}$$

$$+ \frac{\frac{1}{n} c - \overline{s+1}.fB - tgA}{\overline{r+2}.e} x^{2n}$$

$$+ \frac{\frac{1}{n} d - \overline{s+2}.fC - \overline{t+1}.gB - uhA}{\overline{r+3}.e} x^{3n} + \&c.$$

$$= x^{\theta} R^{\lambda} \times \frac{\frac{1}{n} a}{rc} x^{0}$$

$$+ \frac{\frac{1}{n} b}{\overline{r+1}.e} x^{n} - \frac{sf.\frac{1}{n} a}{r.\overline{r+1}.e^{2}} x^{n}$$

$$+ \frac{\frac{1}{n} c}{\overline{r+2}.e} x^{2n} - \frac{\overline{s+1}.f.\frac{1}{n} b}{\overline{r+1}.\overline{r+2}.e^{2}} x^{2n} + \frac{\overline{s+1}.sf^{2}.\frac{1}{n} a}{r.\overline{r+1}.\overline{r+2}.e^{3}} x^{2n} + \frac{tg.\frac{1}{n} a}{r.\overline{r+2}.e^{2}} x^{2n}$$

$$+ \&c.$$

& en continuant ainsi, on aura une expression plus commode de l'aire de la courbe, dont l'ordonnée est $x^{\theta-1} R^{\lambda-1} (a + bx^{n} + cx^{2n} + \&c.)$.

CCVIII.

COROLLAIRE I. Supposé que l'abscisse d'une courbe soit x, que $R = e + fx^{n} + gx^{2n} + hx^{3n} + \&c.$, & que l'ordon-

l'ordonnée perpendiculaire ſoit $y = x^{\theta - 1} R^{\lambda - 1}$; on aura

$$S.ydx = x^{\theta} R^{\lambda} \left(\frac{\frac{1}{n}}{re} - \frac{sfA}{(r+1)e} x^{n} - \left(\frac{(s+1)fB + tgA}{(r+2)e} \right) x^{2n} - \left(\frac{(s+2)fC + (t+1)gB + uhA}{(r+3)e} \right) x^{3n} - \left(\frac{(s+3)fD + (t+2)gC + (u+1)hB - zkA}{(r+4)e} \right) x^{4n} - \&c. \right);$$

on demontre ce Theoreme en faiſant dans la ſerie du Theoreme $a = 1$, $b = o$, $c = o$, $d' = o$ &c. & par conſequent $A = \frac{\frac{1}{n}}{re}$, $B = -\frac{sfA}{r+1 . e}$, $C = -\left(\frac{(s+1)fB + tgA}{(r+2)e} \right)$, &c.

CCIX.

COROLLAIRE II. Si dans le Corollaire precedent on ſuppoſe de plus que R eſt un trinome $e + fx^{n} + gx^{2n}$, ou que $b = o$, $k = o$, on aura $S.ydx =$

$$x^{\theta} R^{\lambda} \left(\frac{\frac{1}{n}}{re} - \frac{sfA}{(r+1)e} x^{n} - \left(\frac{(s+1)fB + tgA}{(r+2)e} \right) x^{2n} - \left(\frac{(s+2)fC + (t+1)gB}{(r+3)e} \right) x^{3n} - \left(\frac{(s+3)fD + (t+2)gC}{(r+4)e} \right) x^{4n} - \&c.$$

CCX.

COROLLAIRE III. Si on ſuppoſe de plus dans le Corollaire II. que $g = o$, ou que R eſt un binome

$e+fx^n$, on aura $S.y\,dx = x^\theta R^\lambda \left(\frac{\frac{1}{n}}{re} - \frac{sfA}{(r+1)e}x^n - \frac{(s+1)fB}{(r+2)e}x^{2n} - \frac{(s+2)fC}{(r+3)e}x^{3n} - \frac{(s+3)fD}{(r+4)e}x^{4n} - \&c.\right)$, & cette suite est toujours finie, lorsque s est un nombre entier negatif; car si au lieu des lettres A, B, C, D, &c. on ecrit leurs valeurs, les termes 2e. 3e. 4e., &c. de la suite seront multipliés par les facteurs $s, s.\overline{s+1}, s.\overline{s+1}.\overline{s+2}$ &c. & par consequent si $s=-1$, $s=-2$, $s=-3$, &c., les termes $s.\overline{s+1}$, $s.\overline{s+1}.\overline{s+2}$ &c., & tous ceux qui les suivent s'evanouïront.

CCXI.

THEOREME IV. Supposé que l'abscisse d'une courbe soit x; que $R = e+fx^n+gx^{2n}+hx^{3n}+$ &c.; $S = k+lx^n+mx^{2n}+n'x^{3n}+$ &c., & l'ordonnée perpendiculaire $y = x^{\theta-1}R^{\lambda-1}S^{\mu-1}(a+bx^n+cx^{2n}+d'x^{3n}+$ &c.$)$, & qu'ayant multiplié la suite e, f, g, h, &c. par chaque terme de la suite k, l, m, n', &c. on ait formé les rectangles.

ek	fk	gk	hk	&c.
el	fl	gl	hl	&c.
em	fm	gm	hm	&c.
en'	fn'	gn'	hn'	&c.

ſuppoſé enfin que les coefficiens numeriques de ces rectangles ſoient reſpectivement

$$\frac{\theta}{n}=r \quad r+\lambda=s \quad s+\lambda=t \quad t+\lambda-v \ \&c.$$
$$r+\mu=s' \quad s+\mu=t' \quad t+\mu=v' \quad v+\mu=w \ \&c.$$
$$s'+\mu=t'' \quad t'+\mu=v'' \quad v'+\mu=w'' \quad w+\mu=z'' \ \&c.$$
$$t''+\mu=v''' \quad v''+\mu=w''' \quad w''+\mu=z''' \quad z''+\mu=y''' \ \&c.$$

on aura l'aire de la courbe $S.ydx=$

$$=x^{\theta}R^{\lambda}S^{\mu}\times\left\{\begin{array}{l}
\dfrac{\frac{1}{n}a}{rek}+\dfrac{\frac{1}{n}b-sfkA-s'elA}{(r+1)ek}x^{n} \\[2ex]
+\dfrac{\frac{1}{n}c-(s+1)fkB-tgkA-t'flA-t''emA}{(r+2)ek}x^{2n} \\[2ex]
+\dfrac{\frac{1}{n}d'-(s+2)fkC-(t+1)gkB-vhkA-(s'+2)elC-(t'+1)flB-v'glA-(t''+1)emB-v''fmA-v'''enA}{(r+3)ek}x^{3n} \\[2ex]
+\ \&c.
\end{array}\right.$$

La lettre A deſignant le coefficient connû du premier terme, ou $\frac{\frac{1}{n}a}{rek}$ avec ſon ſigne $+$ ou $-$, B deſi-

gnant le coefficient connû du fecond terme, C le coefficient connû du troifieme terme, & ainfi de fuite; une ou plufieurs des quantités a, b, c, &c., e, f, g, &c., k, l, m, &c. peuvent manquer, ou être egales a zero comme dans les theoremes precedents.

DEMONSTRATION. Si on fuppofe que l'aire d'une courbe dont l'abfciffe eft x, & l'ordonnée perpendiculaire y' foit $S.y'dx = Ax^{\theta}R^{\lambda}S^{\mu}$, on aura (Art. CCV.) l'ordonnée

$$y' = \left\{\begin{array}{llll} \theta ekA & \left.\begin{array}{l}+\theta\\+\lambda n\end{array}\right\} fkAx^{n} & \left.\begin{array}{l}+\theta\\+2\lambda n\end{array}\right\} gkAx^{2n} & \left.\begin{array}{l}+\theta\\+3\lambda n\end{array}\right\} hkAx^{3n} + \&c. \\ & \left.\begin{array}{l}+\theta\\+\mu n\end{array}\right\} elAx^{n} & \left.\begin{array}{l}+\theta\\+\lambda n\\+\mu n\end{array}\right\} flAx^{2n} & \left.\begin{array}{l}+\theta\\+2\lambda n\\+\mu n\end{array}\right\} glAx^{3n} + \&c. \\ & & \left.\begin{array}{l}+\theta\\+2\mu n\end{array}\right\} emAx^{2n} & \left.\begin{array}{l}+\theta\\+\lambda n\\+2\mu n\end{array}\right\} fmAx^{3n} + \&c. \\ & & & \left.\begin{array}{l}+\theta\\+3\mu n\end{array}\right\} cn'Ax^{3n} + \&c. \end{array}\right\} x^{\theta-1}R^{\lambda-1}S^{\mu-1}$$

maintenant fi dans l'aire $Ax^{\theta}R^{\lambda}S^{\mu}$ & dans la valeur de y', on ecrit B au lieu de A; $\theta+n$ au lieu de θ, & y'' au lieu de y', on aura l'aire de la courbe $S.By''dx$ $= Bx^{\theta+n}R^{\lambda}S^{\mu}$ & l'ordonnée

$$y'' = \left\{ \begin{array}{l} \overline{\theta+n}.\,ekBx^{n} \left.\begin{array}{l} +\overline{\theta+n} \\ +\lambda n \end{array}\right\} fkBx^{2n} \left.\begin{array}{l} +\theta+n \\ +2\lambda n \end{array}\right\} gkBx^{3n} + \&c. \\ \qquad\qquad \left.\begin{array}{l} +\overline{\theta+n} \\ +\mu n \end{array}\right\} elBx^{2n} \left.\begin{array}{l} +\theta+n \\ +\lambda n \\ +\mu n \end{array}\right\} flBx^{3n} + \&c. \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \left.\begin{array}{l} +\theta+n \\ +2\mu n \end{array}\right\} emBx^{3n} + \&c. \end{array} \right\} x^{\theta-1}R^{\lambda-1}S^{\mu-1}$$

& en ecrivant C au lieu de A, $\theta+2n$ au lieu de θ, & y''' au lieu de y' dans l'aire $Ax^{\theta}R^{\lambda}S^{\mu}$, & dans la valeur de y', on aura l'aire de la courbe S. $Cy'''dx = Cx^{\theta+2n}R^{\lambda}S^{\mu}$ l'ordonnée

$$y''' = \left\{ \begin{array}{l} \overline{\theta+2n}.\,ekCx^{2n} \left.\begin{array}{l} +\overline{\theta+2n} \\ +\lambda n \end{array}\right\} fkCx^{3n} + \&c. \\ \qquad\qquad\qquad \left.\begin{array}{l} +\overline{\theta+2n} \\ +\mu n \end{array}\right\} elCx^{3n} + \&c. \end{array} \right\} x^{\theta-1}R^{\lambda-1}S^{\mu-1}$$

& ainsi de suite.

La somme de toutes ces ordonnées y', y'', y''', &c. sera donc $=$

$$\left.\begin{array}{l}
\theta ekA \left.\begin{matrix}+\theta\\+\lambda n\end{matrix}\right\} fkAx^{n} \left.\begin{matrix}+\theta\\+2\lambda n\end{matrix}\right\} gkAx^{2n} + \&c.\\
\quad \left.\begin{matrix}+\theta\\+\mu n\end{matrix}\right\} elAx^{n} \left.\begin{matrix}+\theta\\+\lambda n\\+\mu n\end{matrix}\right\} flAx^{2n} + \&c.\\
\quad +\overline{\theta+n}.\, ekBx^{n}\\
\qquad\qquad \left.\begin{matrix}+\theta\\+2\mu n\end{matrix}\right\} emAx^{2n} + \&c.\\
\qquad\qquad \left.\begin{matrix}+\overline{\theta+n}\\+\lambda n\end{matrix}\right\} fkBx^{2n} + \&c.\\
\qquad\qquad \left.\begin{matrix}+\overline{\theta+n}\\+\mu n\end{matrix}\right\} elBx^{2n} + \&c.\\
\qquad\qquad +\overline{\theta+2n}.\, ekCx^{2n} + \&c.
\end{array}\right\} x^{\theta-1}R^{\lambda-1}S^{\mu-1}$$

& la ſomme des aires correſpondantes ſera $Ax^{\theta} R^{\lambda} S^{\mu} + Bx^{\theta+n}R^{\lambda} S^{\mu} + Cx^{\theta+2n}R^{\lambda} S^{\mu} + \&c. = x^{\theta}R^{\lambda} S^{\mu}(A + Bx^{n} + Cx^{2n} + Dx^{3n} + \&c.)$.

Or ſi la ſomme des ordonnées y', y'', y''', &c. eſt egale a l'ordonnée $y = (a + bx^{n} + cx^{2n} + d'x^{3n} + \&c.)\, x^{\theta-1} R^{\lambda-1} S^{\mu-1}$, la ſomme des aires ſera egale a l'aire $S\, y\, dx$ de la courbe dont l'ordonnée eſt y (Art. CCVI.); & ſi on egale tous les termes a, bx^{n}, cx^{2n}, &c. de l'ordonnée y, aux termes correſpondans de la ſomme des ordonnées y', y'', y''', &c. on aura

$a = \theta e k A$

$b = (\theta + \lambda n) f k A + (\theta + \mu n) e l A + (\theta + n) e k B$

$c = (\theta + 2 \lambda n) g k A + (\theta + \lambda n + \mu n) f l A + (\theta +$
$2 \mu n (e m A + (\theta + n + \lambda n) f k B + (\theta + n + \mu n) e l B$
$+ (\theta + 2 n) e k C$

&c. a l'infini.

D'ou l'on tire

$A = \frac{a}{\theta e k} = \frac{\frac{1}{n} a}{r e k}$, en faisant $\frac{\theta}{n} = r$

$$B = \frac{b - (\theta + \lambda n) f k A - (\theta + \mu n) e l A}{(\theta + n) e k}$$

$= \frac{\frac{1}{n} b - s f k A - s' e l A}{(r + l) e k}$ en faisant de plus $r + \lambda = s$ & $r + \mu = s'$

$$C = \frac{c - (\theta + 2 \lambda n) g k A - (\theta + \lambda n + \mu n) f l A - (\theta + 2 u n) e m A - (\theta + n + \lambda n) f k B - (\theta + n + u n) e l B}{(\theta + 2 n) e k}$$

ou $C = \frac{\frac{1}{n} c - (s + 1) f k B - t g k A - (s' + 1) e l B - t' f l A - t' e m A}{(r + 2) e k}$, en faisant de plus $s + \lambda = t$, $s + \mu = t'$, $s' + \mu = t''$, &c. a l'infini. En substituant ces valeurs de A, B, C, D, &c. dans l'aire $x^{\theta} R^{\lambda} S^{\mu} \times (A + B x^{n} + c x^{2n} +$ &c.$)$ on aura la suite proposée dans le theoreme, egale a l'aire $S. y\, d x$ de la courbe, dont l'abscisse est x, & l'ordonnée perpendiculaire y. *C. Q. F. D.*

On peut tirer un grand nombre de Corollaires de ce theoreme en faiſant différentes ſuppoſitions ſur les termes a, b, c, &c.; e, f, g, &c.; k, l, m, &c. & ſur les expoſans θ, λ, μ, n. On voit auſſi qu'on peut continuer autant qu'on voudra les ſuites de ce theoreme, & des precedens; la maniere dont les derniers termes ſe deduiſent des premiers eſt manifeſte.

CCXII.

THEOREME V. Suppoſé que $R = e + fx^n + gx^{2n} + hx^{3n} +$ &c., que l'ordonnée perpendiculaire d'une courbe dont l'abſciſſe eſt x ſoit $x^{\theta \pm \sigma n} R^{\lambda \pm \tau}$, & que les quantités données θ, n, λ, e, f, g, &c. demeurant toujours les mêmes dans cette ordonnée, on ſubſtitue ſucceſſivement des nombres entiers quelconques au lieu de σ & de τ; Si on connoit l'aire de l'une des courbes qui naiſſent de ces ſubſtitutions, on connoitra auſſi les aires de toutes les autres courbes, lorſque R eſt un binome, ou $= e + fx^n$; & ſi on connoit les aires de deux des courbes qui naiſſent de ces ſubſtitutions, on connoitra auſſi les aires de toutes les autres courbes, lorſque R eſt un trinome $= e + fx^n + gx^{2n}$; & ſi on connoit les aires de trois de ces courbes, on connoitra auſſi les aires de toutes

les

les autres courbes, lorſque R eſt un quadrinome $= e + fx^n + gx^{2n} + hx^{3n}$, & ainſi de ſuite a l'infini.

DEMONSTRATION. CAS I. Lorſque l'expoſant θ de x eſt continuellement augmenté, ou diminué par l'addition ou par la ſouſtraction de n ſans aucun changement dans l'expoſant de R.

I.° R etant un Binome $= e + fx^n$; ſoit $x^{\theta-1}R^{\lambda-1}$ l'ordonnée d'une courbe, & A l'aire qui luï repond $= S.x^{\theta-1}R^{\lambda-1}dx$. l'aire A etant donnée, on aura l'aire $S.x^{\theta+n-1}R^{\lambda-1}dx$ de la courbe dont l'ordonnée eſt $x^{\theta+n-1}R^{\lambda-1}$: car puiſque $A = S.x^{\theta-1}R^{\lambda-1}dx$, en multipliant de coté & d'autre par une conſtante quelconque p, on aura $pA = S.px^{\theta-1}R^{\lambda-1}dx$; & par ce que (Art. CCIV.) $x^\theta R^\lambda$ eſt l'aire d'une courbe dont l'ordonnée eſt $(\theta e + \overline{\theta+\lambda n}.fx^n)x^{\theta-1}R^{\lambda-1}$, on aura $x^\theta R^\lambda = S.dx(\theta e + \overline{\theta+\lambda n}.fx^n)x^{\theta-1}R^{\lambda-1}$, par conſequent $x^\theta R^\lambda - pA = S.(\theta e + \overline{\theta+\lambda n}fx^n)x^{\theta-1}R^{\lambda-1}dx - S.px^{\theta-1}R^{\lambda-1}dx = S.(\theta e - p + \overline{\theta+\lambda n}.fx^n)x^{\theta-1}.R^{\lambda-1}dx$; Donc en faiſant $\theta e - p = o$ ou $p = \theta e$, on aura $x^\theta R^\lambda - \theta eA = S.(\overline{\theta+\lambda n}.fx^n)x^{\theta-1}R^{\lambda-1}dx = S.(\theta + \lambda n)fx^{\theta+n-1}dxR^{\lambda-1}$; & en diviſant de part & d'au-

tre par la quantité conſtante $(\theta + \lambda n)f$, on trouve $\frac{x^{\theta} R^{\lambda} - \theta e A}{(\theta + \lambda n) f} = S. x^{\theta + n - 1} dx \, R^{\lambda - 1}$, aire d'une courbe dont l'ordonnée eſt $x^{\theta + n - 1} R^{\lambda - 1}$; ayant deſigné cette aire par B, on voit que, comme par l'aire donnée A d'une courbe dont l' ordonnée etoit $x^{\theta - 1} R^{\lambda - 1}$ on a trouvé l'aire B de la courbe dont l'ordonnée eſt $x^{\theta + n - 1} R^{\lambda - 1}$, on trouvera de même par l'aire donnée B la troiſieme aire C d'une autre courbe dont l'ordonnée ſera $x^{\theta + 2n - 1} R^{\lambda - 1}$, & ainſi de ſuite a l'infini.

C'eſt la même maniere pour aller de l'aire A en deſcendant, ou pour trouver l'aire d'une autre courbe, dont l'ordonnée ſoit $x^{\theta - n - 1} R^{\lambda - 1}$, car en ſubſtituant $\theta - n$ au lieu de θ dans le Theoreme I, on trouve que $x^{\theta - n} R^{\lambda}$ eſt l'aire d'une courbe dont l'ordonnée eſt $(\overline{\theta - n}.e + \overline{\theta - n + \lambda n}.f x^{n}) x^{\theta - n - 1} R^{\lambda - 1} = (\overline{\theta - n}.e x^{-n} + \overline{\theta - n + \lambda n}.f) x^{\theta - 1} R^{\lambda - 1}$; & puiſque l'aire $A = S. x^{\theta - 1} R^{\lambda - 1} dx$, & $pA = S. p x^{\theta - 1} R^{\lambda - 1} dx$, on aura $x^{\theta - n} R^{\lambda} - pA = S. (\overline{\theta - n}.e x^{-n} + \overline{\theta - n + \lambda n}.f) x^{\theta - 1} R^{\lambda - 1} dx - S. p x^{\theta - 1} R^{\lambda - 1} dx = S. (\overline{\theta - n}.e x^{-n} + \overline{\theta - n + \lambda n}.f - p) x^{\theta - 1} R^{\lambda - 1} dx$; donc en faiſant

$\overline{\theta - n + \lambda n}.f - p = 0$, ou $p = \overline{\theta - n + \lambda n}.f$, on aura $x^{\theta - n} R^{\lambda} - (\theta - n + \lambda n).fA = S.(\overline{\theta - n}.e x^{-n}) x^{\theta - 1} R^{\lambda - 1} dx = S.(\overline{\theta - n}.e) x^{\theta - n - 1} R^{\lambda - 1} dx$; par conſequent $\frac{x^{\theta - n} R^{\lambda} - (\theta - n + \lambda n) f A}{(\theta - n) e} = S.x^{\theta - n - 1} R^{\lambda - 1} dx$ aire d'une courbe dont l'ordonnée eſt $x^{\theta - n - 1} R^{\lambda - 1}$.

On peut auſſi deſcendre de l'aire B a l'aire A au moyen de l'equation $x^{\theta} R^{\lambda} - \theta e A = (\theta + \lambda n) f B$. Car en tranſpoſant on aura $x^{\theta} R^{\lambda} - (\theta + \lambda n) f B = \theta e A$, & en diviſant par θe, on trouve $A = \frac{x^{\theta} R^{\lambda} - (\theta + \lambda n) f B}{\theta e}$.

II? R etant un trinome $= e + f x^{n} + g x^{2n}$, que les ordonnées des deux courbes ſoient $x^{\theta - 1} R^{\lambda - 1}$, & $x^{\theta + n - 1} R^{\lambda - 1}$ & leurs aires $A = S.x^{\theta - 1} R^{\lambda - 1} dx$, & $B = S.x^{\theta + n - 1} R^{\lambda - 1} dx$ les deux aires A, & B etant données, on aura l'aire C, ou $S.x^{\theta + 2n - 1} R^{\lambda - 1} dx$ car puiſque (Art. CCIV.) $x^{\theta} R^{\lambda}$ eſt l'aire d'une courbe dont l'ordonnée eſt $(\theta e + \overline{\theta + \lambda n}.f x^{n} + \overline{\theta + 2\lambda n}.g x^{2n}) x^{\theta - 1} R^{\lambda - 1}$, ſi on multiplie l'aire A, & ſa valeur $S.x^{\theta - 1}.R^{\lambda - 1} dx$ par une conſtante indeterminée p, & auſſi l'aire

B & sa valeur $S.\,x^{\theta+n-1}\,R^{\lambda-1}\,dx$ par une autre constante indeterminée q, on aura l'equation $x^{\theta}\,R^{\lambda}-pA$ $-qB=S.\,(\theta e+\overline{\theta+\lambda n}.f x^{n}+\overline{\theta+2\lambda n}.g x^{2n})\,x^{\theta-1}$ $R^{\lambda-1}\,dx-S.p\,x^{\theta-1}\,R^{\lambda-1}\,dx-S.q\,x^{n}\,x^{\theta-1}\,R^{\lambda-1}\,dx$ $=S.\left(\begin{matrix}\theta e+\overline{\theta+\lambda n}.f\\ -p \qquad\quad -q\end{matrix}\right\}x^{n}+\overline{\theta+2\lambda n}.g x^{2n}\Big)\,x^{\theta-1}\,R^{\lambda-1}.$ dx; & en faisant $p=\theta e$, & $q=\overline{\theta+\lambda n}.f$, & divisant de coté & d'autre par $\overline{\theta+2\lambda n}.g$, on aura

$\frac{x^{\theta}R^{\lambda}-\theta eA-(\theta+\lambda n)fB}{(\theta+2\lambda n)g}=S.x^{\theta+2n-1}\,R^{\lambda-1}\,dx$, aire d'une courbe dont l'ordonnée est $x^{\theta+2n-1}\,R^{\lambda-1}$: nous designerons cette aire par C, & de même que par le moyen des deux aires données A & B, on a trouvé l'aire C, on pourra par le moyen des aires données B & C trouver une quatrieme aire D d'une courbe dont l'ordonnée sera $x^{\theta+3n-1}\,R^{\lambda-1}$ & ainsi de suite a l'infini.

C'est la même maniere pour aller des aires B & A en descendant, ou pour trouver l'aire d'une autre courbe, dont l'ordonnée soit $x^{\theta-n}\,R^{\lambda-1}$, car en operant comme pour le binome, on trouvera $x^{\theta-n}\,R^{\lambda}=$ $S.\,(\overline{\theta-n}.e\,x^{-n}+\overline{\theta-n+\lambda n}.f+\overline{\theta-n+2\lambda n}.g\,x^{n})\times$

$x^{\theta-1} R^{\lambda-1} dx$; & $x^{\theta-n} R^{\lambda} - pA - qB =$

$$S.\left(\overline{\theta-n}.\,c x^{-n} + \begin{matrix}\overline{\theta-n+\lambda n}.f\\ -p\end{matrix} + \begin{matrix}\overline{\theta-n+2\lambda n}.g\\ -q\end{matrix}\Big\} x^{n}\right)\times$$

$x^{\theta-1} R^{\lambda-1} dx$; donc en faifant $p = (\theta - n + \lambda n) f$, & $q = (\theta - n + 2\lambda n) g$, & divifant par $(\theta - n) c$, on trouvera $\frac{x^{\theta-n} R^{\lambda} - (\theta - n + \lambda n) f A - (\theta - n + 2\lambda n) g B}{(\theta - n) c} =$ $S.x^{\theta-n-1} R^{\lambda-1} dx$, aire d'une Courbe dont l'ordonnée eft $x^{\theta-n-1} R^{\lambda-1}$.

On peut auffi fe fervir de l'equation $x^{\theta} R^{\lambda} - \theta e A - (\theta + \lambda n) f B = (\theta + 2\lambda n) g. S. x^{\theta+2n-1} R^{\lambda-1} dx = (\theta + 2\lambda n) g C$, pour defcendre des aires C, & B a l'aire A car en tranfpofant & en divifant par θe, on trouve $\frac{x^{\theta} R^{\lambda} - (\theta + \lambda n) f B - (\theta + 2\lambda n) g C}{\theta e} = A$.

III° On voit facilement qu'au moyen de la même Methode, fi on connoit trois aires, on trouvera les autres, lorfque R fera un quadrinome; Si on connoit quatre aires, on trouvera les autres lorfque R eft un quinome, & ainfi de fuite. *C. Q. F. D.*

CAS II. Lorfque l'expofant λ de R eft continuellement augmente ou dimiuué par l'addition, ou par la fouftraction de l'unité fans aucun changement dans l'expofant de x.

1.° R etant un binome $=e+fx^n$; soit $x^{\theta-1}R^\lambda$ l'ordonnée d'une courbe, & l'aire qui lui repond, $S.x^{\theta-1}R^\lambda dx=A$. L'aire A etant donnée, on trouvera l'aire $S.x^{\theta-1}R^{\lambda-1}dx$ d'une autre courbe dont l'ordonnée est $x^{\theta-1}R^{\lambda-1}$; car p etant une constante indeterminée, on aura $px^{\theta-1}R^\lambda=pR.x^{\theta-1}R^{\lambda-1}=(pe+pfx^n)x^{\theta-1}R^{\lambda-1}$, & $pA=S.(pe+pfx^n).x^{\theta-1}R^{\lambda-1}dx$, & a etant une autre constante indeterminée, on aura (Art. CCIV.) $ax^\theta R^\lambda=S.(\theta ea+\overline{\theta+\lambda n}.afx^n)x^{\theta-1}R^{\lambda-1}dx$; par consequent (Art. CCVI.) $ax^\theta R^\lambda+pA=S.\left(\begin{matrix}\theta ea+\overline{\theta+\lambda n}.af\\+pe\quad+pf\end{matrix}\Big\}x^n\right)x^{\theta-1}\times R^{\lambda-1}dx$; donc en supposant $p+\overline{\theta+\lambda n}.a=o$, ou $p=-(\theta+\lambda n)a$, on aura $ax^\theta R^\lambda-(\theta+\lambda n)aA=S.(\theta ea+pe)x^{\theta-1}R^{\lambda-1}dx=S.(-\lambda nae)x^{\theta-1}\times R^{\lambda-1}dx$, & en divisant de part & d'autre par la constante $-\lambda nae$, on aura $\frac{(\theta+\lambda n)A-x^\theta R^\lambda}{\lambda ne}=S.x^{\theta-1}R^{\lambda-1}dx=B$, aire d'une courbe dont l'ordonnée est $x^{\theta-1}R^{\lambda-1}$. Si, au lieu de supposer $p=-(\theta+\lambda n)a$, on fait $\theta ea+pe=o$, ou $p=-\theta a$, on aura

$a x^{\theta} R^{\lambda} - \theta a A = S. \lambda n a f x^{\theta + n - 1} R^{\lambda - 1} dx$, &

$\frac{x^{\theta} R^{\lambda} - \theta A}{\lambda n f} = S. x^{\theta + n - 1} R^{\lambda - 1} dx = C$, aire d'une courbe dont l'ordonnée eſt $x^{\theta + n - 1} R^{\lambda - 1}$; & comme par le moyen de l'aire donnée A, on vient de trouver deux autres aires B, & C, on pourra trouver par le moyen de l'aire B deux autres aires D & E, qui repondront aux ordonnées $x^{\theta - 1} R^{\lambda - 2}$, $x^{\theta + n - 1} R^{\lambda - 2}$, & ainſi de ſuite a l'infini.

On peut auſſi remonter de l'aire B a l'aire A par l'equation $x^{\theta} R^{\lambda} - (\theta + \lambda n) A = - \lambda n e B$, c'eſt a dire, que connoiſſant l'aire B, ou $S.\ x^{\theta - 1} R^{\lambda - 1} dx$, d'une courbe dont l'ordonnée eſt $x^{\theta - 1} R^{\lambda - 1}$, on peut trouver l'aire A, ou $S.\ x^{\theta - 1} R^{\lambda} dx$ d'une autre courbe dont l'ordonnée eſt $x^{\theta - 1} R^{\lambda}$; car, puiſqu'on a l'equation $x^{\theta} R^{\lambda} - (\theta + \lambda n) A = - \lambda n e B$, en tranſpoſant, & en diviſant par $\theta + \lambda n$, on trouve $A = \frac{x^{\theta} R^{\lambda} + \lambda n e B}{\theta + \lambda n}$.

II.° R etant un trinome $= e + f x^{n} + g x^{2n}$, & les deux aires A, & B, ou $S.\ x^{\theta - 1} R^{\lambda} dx$, & $S.\ x^{\theta + n - 1} R^{\lambda} dx$ etant données, il faut trouver deux autres aires C, & D, ou $S.\ x^{\theta - 1} R^{\lambda - 1} dx$, & $S.$

$x^{\theta+n-1}R^{\lambda-1}dx$, & par le moyen de ces deux aires C, & D, en trouver deux autres E, & F, ou $S.\,x^{\theta-1}R^{\lambda-2}dx$, & $S.\,x^{\theta+n-1}R^{\lambda-2}dx$, & ainſi de ſuite.

On a par ſuppoſition $pA = S.px^{\theta-1}R^{\lambda}dx = S.(pe + pfx^{n} + pgx^{2n})x^{\theta-1}R^{\lambda-1}dx$, & $qB = S.qx^{\theta+n-1} \times R^{\lambda}dx = S.(qe + qfx^{n} + qgx^{2n})x^{\theta+n-1}R^{\lambda-1}dx$; on a de plus (Art. CCIV.) $ax^{\theta}R^{\lambda} = S.(\theta ae + \overline{\theta+\lambda n}.afx^{n} + \overline{\theta+2\lambda n}.agx^{2n})x^{\theta-1}R^{\lambda-1}dx$, & $bx^{\theta+n}R^{\lambda} = S.\overline{(\theta+n}.bex^{n} + \overline{\theta+n+\lambda n}.bfx^{2n} + \overline{\theta+n+2\lambda n}. \times bgx^{3n})x^{\theta-1}R^{\lambda-1}dx$. En prenant les ſommes de ces aires, on aura l'equation $ax^{\theta}R^{\lambda} + bx^{\theta+n}R^{\lambda} + pA + qB =$

$$S.\left\{\begin{array}{ll}\theta ae & +\overline{\theta+\lambda n}.af \\ +pe & +\overline{\theta+n}.be \\ & +pf \\ & +qe\end{array}\right\} x^{n} \left\{\begin{array}{r}+\overline{\theta+2\lambda n}.ag \\ +\overline{\theta+n+\lambda n}.bf \\ +pg \\ +qf\end{array}\right\} x^{2n} \left\{\begin{array}{r}+\overline{\theta+n+2\lambda n}.bg \\ +qg\end{array}\right\} x^{3n} \Big\} x^{\theta-1}R^{\lambda-1}dx$$

Maintenant pour determiner les valeurs des conſtantes p, q, a, & b, de maniere que les termes de cette equation des aires ou ſe trouvent x^{2n}, & x^{3n} s'evanouïſſent

nouïssent, & que l'equation ne contienne plus que les aires A, B, $S.\ x^{\theta+n-1} R^{\lambda-1} dx$, & des quantités constantes, on egalera separément a zero le premier, le troisieme, & le quatrieme termes; on aura par le premier terme $\theta ae + pe = o$, ou $p = -\theta a$; par le 4.e terme $q = -\theta b - nb - 2\lambda nb$, & par le 3.e en chassant p, & q, on aura $b = \frac{2ag}{f}$. En substituant ces valeurs de p, q, & b dans le second terme de l'equation des aires, le coefficient de ce terme sera $\frac{\lambda naff - 4\lambda nage}{f}$, & l'equation deviendra $ax^\theta R^\lambda + bx^{\theta+n} R^\lambda + pA + qB = S.\left(\frac{\lambda naff - 4\lambda nage}{f}\right) x^n . x^{\theta-1} \times R^{\lambda-1} dx$, ou $ax^\theta R^\lambda + \frac{2ag}{f} x^{\theta+n} R^\lambda - \theta a A - (\theta + n + 2\lambda n) \frac{2agB}{f} = S.\left(\frac{\lambda naff - 4\lambda nage}{f}\right) x^{\theta+n-1} R^{\lambda-1} dx$, ou, en effaçant a, $x^\theta R^\lambda + \frac{2g}{f} x^{\theta+n} R^\lambda - \theta A - (\theta + n + 2\lambda n) \frac{2gB}{f} = S.\left(\frac{\lambda nff - 4\lambda nge}{f}\right) x^{\theta+n-1} R^{\lambda-1} dx$ donc en divisant de coté & d'autre par $\frac{\lambda nff - 4\lambda nge}{f}$, & nommant D le premier quotient, on aura $D = S.\ x^{\theta+n-1} R^{\lambda-1} dx$, aire d'une courbe, dont l'ordonnée est $x^{\theta+n-1} R^{\lambda-1}$; on trouvera de la même maniere

l'aire C, ou $S.\ x^{\theta-1} R^{\lambda-1} dx$ d'une autre courbe, dont l'ordonnée sera $x^{\theta-1} R^{\lambda-1}$, en egalant separément a zero chacun des quatre termes de l'equation des aires excepté le premier, & on operera de même pour trouver, par le moyen des aires données C, & D, les aires E & F de deux autres courbes, dont les ordonnées sont $x^{\theta-1} R^{\lambda-2}$, & $x^{\theta+n-1} R^{\lambda-2}$, & ainsi de suite on pourra aussi remonter des aires E & F aux aires C, & D, & de la aux aires A, & B, & ainsi de suite en se servant de l'equation de la somme des aires, comme nous l'avons fait pour le binome.

Donc, si on augmente ou diminue continuellement l'exposant de R par l'addition, ou par la soustraction de l'unité, & qu'on connoisse deux des aires les plus simples trouvées de cette maniere, on pourra ttouver toutes les autres a l'infini, lorsque R est un trinome, comme on les trouve pour une seule aire donnée, lorsque R est un Binome.

III° On voit facilement qu'au moyen de la même methode, si on connoit trois aires, on trouvera les autres, lorsque R est un quadrinome; si on connoit quatre aires, on trouvera les autres, lorsque R est un quinome, & ainsi de suite.

CAS III. Lorsque l'exposant θ de x est continuellement augmenté ou diminué par l'addition, ou par la

ſouſtraction de n, & que l'expoſant λ de R eſt auſſi continuellement augmenté ou diminué par l'addition, ou par la ſouſtraction de l'unité: Il eſt evident qu'on pourra trouver les aires par les deux cas precedents joints enſemble. *C. Q. F. D.*

CCXIII.

COROLLAIRE I. Nous avons trouvé dans le premier cas du Theoreme l'equation $x^\theta R^\lambda - \theta e A - (\theta + \lambda n) f B = (\theta + 2\lambda n) g C$, lorſque R eſt un trinome $= e + f x^n + g x^{2n}$, & que A, B, C deſignent les aires $S. x^{\theta - 1} R^{\lambda - 1} dx$, $S. x^{\theta + n - 1} R^{\lambda - 1} dx$, $S. x^{\theta + 2n - 1} \times R^{\lambda - 1} dx$. Cette equation en tranſpoſant & diviſant par n devient $\frac{\theta}{n} e A + \left(\frac{\theta}{n} + \lambda\right) f B + \left(\frac{\theta}{n} + 2\lambda\right) g C = \frac{1}{n} x^\theta R^\lambda$; en remettant les valeurs de A, B, C, elle devient $\frac{1}{n} x^\theta R^\lambda = \frac{\theta}{n} e S. x^{\theta - 1} R^{\lambda - 1} dx + \left(\frac{\theta}{n} + \lambda\right) f. \times S. x^{\theta + n - 1} R^{\lambda - 1} dx + \left(\frac{\theta}{n} + 2\lambda\right) g. S. x^{\theta + 2n - 1} R^{\lambda - 1} \times dx$; en ecrivant par tout $\theta \pm \sigma n$ au lieu de θ, on aura $\frac{1}{n} x^{\theta \pm \sigma n} R^\lambda = \left(\frac{\theta}{n} \pm \sigma\right) e. S. x^{\theta \pm \sigma n - 1} R^{\lambda - 1} dx + \left(\frac{\theta}{n} + \lambda \pm \sigma\right) f. S. x^{\theta \pm \sigma n + n - 1} R^{\lambda - 1} dx + \left(\frac{\theta}{n} + 2\lambda\right.$

$\pm\sigma\,)\,g.\ S.x^{\theta\pm\sigma n+2n-1}\,R^{\lambda-1}dx$; & enfin en suppofant $\frac{\theta}{n}=r$, $r+\lambda=s$, $s+\lambda=t$, $t+\lambda=u$, $u+\lambda=y'$, &c., on aura $\frac{1}{n}x^{\theta\pm\sigma n}R^{\lambda}=(r\pm\sigma)\,e.\ S.x^{\theta\pm\sigma n-1}\,R^{\lambda-1}dx+(s\pm\sigma)\,f.\ S.\ x^{\theta-1+n\pm\sigma n}\,R^{\lambda-1}dx+(t\pm\sigma)g\ \times\ S.x^{\theta-1+2n\pm\sigma n}\,R^{\lambda-1}dx.$

CCXIV.

COROLLAIRE II. On voit par la progreffion des termes de cette derniere equation que, fi on fuppofe R egal a un Polynome quelconque $e+fx^{n}+gx^{2n}+bx^{3n}+$ &c. on aura l'equation generale $\frac{1}{n}x^{\theta\pm\sigma n}R^{\lambda}=(r\pm\sigma)e.\ S.x^{\theta-1\pm\sigma n}\,R^{\lambda-1}dx+(s\pm\sigma)f\ \times\ S.\ x^{\theta-1+n\pm\sigma n}\,R^{\lambda-1}dx+(t\pm\sigma)g.S.x^{\theta-1+2n\pm\sigma n}\ \times\ R^{\lambda-1}dx+(u\pm\sigma)b.S.x^{\theta-1+3n\pm\sigma n}R^{\lambda-1}dx+(y'\pm\sigma)k.S.x^{\theta-1+4n\pm\sigma n}\,R^{\lambda-1}dx+$ &c. dans laquelle on fuppofera les coefficients g, b, k, &c. egaux a zero, lorfque R fera un binome, ou $e+fx^{n}$; on fuppofera les coefficients b, k, &c. egaux a zero lorfque R fera un trinome, ou $e+fx^{n}+gx^{2n}$; on fuppofera le coefficient k, & ceux qui le fuivent, agaux a zero, lorf-

que R ſera un quadrinome, ou $e+fx^n+gx^{2n}+hx^{3n}$, & ainſi des autres polynomes. On comprend par cette equation generale la verité du premier cas dans toute ſon etendue; car il eſt evident que, R etant un binome, l'equation ne contiendra d'un coté, que deux intégrales ou deux aires, & que, l'une etant donnée, on trouvera l'autre; R etant un trinome l'equation ne contiendra d'un coté que trois intégrales ou trois aires, dont deux etant données on trouvera la troiſieme; R etant un quadrinome l'equation ne contiendra d'un coté que quatre intégrales, trois deſquelles etant données, on trouvera la quatrieme, & ainſi de ſuite.

CCXV.

COROLLAIRE III. Dans le ſecond Cas du theoreme nous avons trouvé l'equation $x^\theta R^\lambda + \frac{2g}{f} x^{\theta+n} \times R^\lambda - \theta A - (\theta + n + 2\lambda n) \frac{2gB}{f} = \left(\frac{\lambda n ff - 4\lambda n g e}{f}\right) S. x^{\theta+n-1} R^{\lambda-1} dx$. Lorſque R eſt un trinome, ou $e+fx^n+gx^{2n}$, & que $A = S. x^{\theta-1} R^\lambda dx$, & $B = S. x^{\theta+n-1} R^\lambda dx$. Cette equation en ſuppoſant $\frac{ff-4ge}{f} = P$, & en tranſpoſant devient $x^\theta R^\lambda + \frac{2g}{f} x^{\theta+n} R^\lambda = \theta A + (\theta + n + 2\lambda n) \frac{2g}{f} B + \lambda n P. S.$

$x^{\theta+n-1} R^{\lambda-1} dx$; en divisant par n, & remettant les valeurs de A, & de B, elle devient $\frac{1}{n} x^{\theta} R^{\lambda} + \frac{2g}{fn} \times x^{\theta+n} R^{\lambda} = \frac{\theta}{n} S. x^{\theta-1} R^{\lambda} dx + \left(\frac{\theta}{n} + 1 + 2\lambda\right) \frac{2g}{f} \times S. x^{\theta+n-1} R^{\lambda} dx + \lambda P S. x^{\theta+n-1} R^{\lambda-1} dx$, & en ecrivant par tout $\lambda \pm \tau$ au lieu de λ, on aura $\frac{1}{n} x^{\theta} \times R^{\lambda \pm \tau} + \frac{2g}{fn} x^{\theta \pm n} R^{\lambda \pm \tau} = \frac{\theta}{n} S. x^{\theta-1} R^{\lambda \pm \tau} dx + \left(\frac{\theta}{n} + 1 + 2\lambda \pm 2\tau\right) \frac{2g}{f} S. x^{\theta+n-1} R^{\lambda \pm \tau} dx + (\lambda \pm \tau) P \times S. x^{\theta+n-1} R^{\lambda-1 \pm \tau} dx = r\, S. x^{\theta-1} R^{\lambda \pm \tau} dx + (t + 1 \pm 2\tau) \frac{2g}{f} S. x^{\theta+n-1} R^{\lambda \pm \tau} dx + (\lambda \pm \tau) P.S. x^{\theta+n-1} \times R^{\lambda-1 \pm \tau} dx$, en supposant $\frac{\theta}{n} = r$, $r + \lambda = s$, $s + \lambda = t$, comme cy-dessus; cette equation est generale pour le trinome, & elle sert aussi pour un binome, en faisant $g = o$.

CCXVI.

COROLLAIRE IV. Si dans le second Cas du theoreme on fait evanouïr tous les termes excepté le premier dans la quantité

$$\left.\begin{matrix}\theta ae & +\overline{\theta+\lambda n}.af \\ +pe & +\overline{\theta+n}.be \\ & +pf \\ & +qe\end{matrix}\right\} x^{n} \left.\begin{matrix}+\overline{\theta+2\lambda n}.ag \\ +\overline{\theta+n+\lambda n}.bf \\ +pg \\ +qf\end{matrix}\right\} x^{2n} \left.\begin{matrix}+\overline{\theta+n+2\lambda n}.bg \\ +qg\end{matrix}\right\} x^{3n}$$

on trouvera $p = \frac{\lambda n a ff}{ff - 2eg}$; $q = -\frac{(\theta+n+2\lambda n)afg}{ff-2eg}$; & $b = \frac{afg}{ff-2eg}$; & en ſubſtituant ces valeurs dans l'equation de la ſomme des aires $a x^{\theta} R^{\lambda} + b x^{\theta+n} R^{\lambda} + pA + qB = S.(\theta ae + pe) x^{\theta-1} R^{\lambda-1} dx$, on aura $a x^{\theta} R^{\lambda} + \frac{afg}{ff-2eg} x^{\theta+n} R^{\lambda} = \left(\theta ae + \frac{\lambda n a ffe}{ff-2eg} - (\theta+2\lambda n)ae\right) \times S.x^{\theta-1} R^{\lambda-1} dx - \left(\frac{\lambda n a ff}{ff-2eg} - (\theta+2\lambda n)a\right) S.x^{\theta-1} \times R^{\lambda} dx + \frac{(\theta+n+2\lambda n)afg}{ff-2eg} S.x^{\theta+n-1} R^{\lambda} dx$, aprés avoir mis $S.\ x^{\theta-1} R^{\lambda} dx$ au lieu de A, & $S.\ x^{\theta+n-1} R^{\lambda} dx$ au lieu de B. en multipliant toute cette equation par $ff - 2eg$, & en la diviſant par na, elle devient par reduction $\frac{ff-2eg}{n} x^{\theta} R^{\lambda} + \frac{fg}{n} x^{\theta+n} R^{\lambda} = (4\lambda gee - \lambda ffe) S.x^{\theta-1} R^{\lambda-1} dx + \left(\frac{\theta}{n}(ff-2eg) + \lambda ff - 4\lambda ge\right) S.x^{\theta-1} R^{\lambda} dx + \left(\frac{\theta}{n} + 1 + 2\lambda\right) fg.S.\ x^{\theta+n-1} dx$; enfin ſi on ſubſtitue par tout dans cette equation $\lambda = \pm r$ a la

place de λ, on aura pour le trinome R l'autre equation generale $\left(\frac{ff-2eg}{n}\right)x^\theta R^{\lambda\pm\tau} + \frac{fg}{n}x^{\theta+n}R^{\lambda\pm\tau} = \left((\lambda\pm\tau)(4gee-ffe)\right)S.x^{\theta-1}R^{\lambda-1}dx + \left(\frac{\theta}{n}(ff-2eg)+(\lambda\pm\tau)(ff-4ge)\right)S.x^{\theta-1}R^{\lambda\pm\tau}dx + \left(\frac{\theta}{n}+1+2\lambda\pm2\tau\right)fg.S.x^{\theta+n-1}R^{\lambda\pm\tau}dx$, qu'on appliquera au binome, en faisant $g=o$.

CCXVII.

COROLLAIRE V. On peut deduire aisément des principes precedents une methode analogue a celle de Newton. Soit donnée l'intégrale A de la différentielle $\overline{e+fx^n}|^m . x^{\lambda n-1}dx$, & qu'il faille trouver l'intégrale B de la differentielle $(e+fx^n)^m . x^{\lambda n+n-1}dx$, dans la quelle l'exposant de x hors de la parenthese soit augmenté de n exposant de x dans la parenthese: il faut multiplier $e+fx^n$ par $x^{\sigma m}$, & en même tems diviser $x^{\lambda n+n-1}$ par la même quantité; on aura $(ex^\sigma+fx^{n+\sigma})^m . x^{\lambda n+n-\sigma m-1}dx = dB$. Soit supposé $n+\sigma$ exposant de la plus haute puissance de x, dans la parenthese, egal a l'exposant de la plus haute puissance de x hors de la parenthese, augmenté de l'unité, c'est a dire $n+\sigma=$

$\lambda n + n - \sigma m$, d'ou l'on tire $\sigma = \frac{\lambda n}{m+1}$ maintenant si l'on consideroit comme constant le premier terme renfermé dans la parenthese, la différentielle precedente $(e x^{\sigma} + f x^{n+\sigma})^m \cdot x^{\lambda n + n - \sigma m - 1} dx$, ou $(e x^{\sigma} + f x^{n+\sigma})^m \cdot x^{n+\sigma-1} dx$, a cause de $\sigma m + \sigma = \lambda n$, auroit pour intégrale $\frac{(e x^{\sigma} + f x^{n+\sigma})^{m+1}}{\overline{m+1} \cdot \overline{n+\sigma} \cdot f}$ (Art. XL.); mais en supposant les deux termes variables, tels qu'ils sont actuellement, on auroit la différentielle $(e x^{\sigma} + f x^{n+\sigma})^m \cdot x^{n+\sigma-1} dx + \frac{\sigma e}{\overline{n+\sigma} \cdot f} (e x^{\sigma} + f x^{n+\sigma})^m x^{\sigma-1} dx$. Donc $\frac{(e x^{\sigma} + f x^{n+\sigma})^{m+1}}{\overline{m+1} \cdot \overline{n+\sigma} \cdot f} - \frac{\sigma e}{n+\sigma \cdot f} S. (e x^{\sigma} + f x^{n+\sigma})^m \cdot x^{\sigma-1} dx = B$, &c, en substituant pour σ sa valeur, on aura $\frac{(e + f x^n)^{m+1} x^{\lambda n}}{\overline{m+\lambda+1} \cdot n f} - \frac{\lambda e}{\overline{m+\lambda+1} \cdot f} S. (e + f x^n)^m \cdot x^{\lambda n - 1} dx = B$; mais l'intégrale A de $(e + f x^n)^m \cdot x^{\lambda n - 1} dx$ est donneé par supposition; donc $\frac{(e + f x^n)^{m+1} x^{\lambda n}}{\overline{m+\lambda+1} \cdot n f} -$

$\frac{\lambda e A}{\overline{m+\lambda+1} \cdot f} = B$.

Si la quantité renfermée dans la parenthese etoit un polynome tel que $e + f x^n + g x^{2n} + b x^{3n} +$ &c., alors la différentielle de $(e + f x^n + g x^{2n} + b x^{3n} +$

&c.$)^{m+1}. x^{\lambda n}$ seroit $\overline{m+1}\ (nfx^{n-1}dx + 2ngx^{2n-1}dx + 3nbx^{3n-1}dx + \&c.)\ (e+fx^n+gx^{2n}+\&c.)^m x^{\lambda n} + (e+fx^n+gx^{2n}+\&c.)^{m+1}.\ \lambda n x^{\lambda n-1}dx = \overline{m+1}.\ nfx^{\lambda n+n-1}dx + \overline{m+1}.\ 2ngx^{\lambda n+2n-1}dx + \&c. + (\lambda n e x^{\lambda n-1}dx + \lambda n f x^{\lambda n+n-1}dx + \lambda n g x^{\lambda n+2n-1}dx + \&c.)\ (e+fx^n+gx^{2n}+\&c.)^m$; il est evident par la loi de cette progression que, si les intégrales de $x^{\lambda n-1}dx\ (e+fx^n+gx^{2n}+\&c.)^m$, $x^{\lambda n+n-1}dx(e+fx^n+gx^{2n}+\&c.)^m$, $x^{\lambda n+2n-1}(e+fx^n+gx^{2n}+\&c.)^m$, &c. sont representées par A, B, C, D, &c. l'intégrale de toute la suite precedente, qui est $(e+fx^n+gx^{2n}+bx^{3n}+\&c.)^{m+1}x^{\lambda n}$ sera representée par $\lambda n e A + \overline{\lambda+m+1}.\ nfB + \overline{\lambda+2m+2}.\ ngC + \overline{\lambda+3m+3}.\ nbD + \&c.$ & par consequent, si on a un nombre quelconque d'intégrales données A, B, C, on trouvera la suivante D, &c. soit par exemple, $g=o$, $b=o$, & soit donnée la valeur de A, on auroit $(e+fx^n)^{m+1}x^{\lambda n} = \lambda n e A + \overline{\lambda+m+1}.\ nfB$, & $B = \frac{(e+fx^n)^{m+1}x^{\lambda n}}{\overline{\lambda+m+1}.\ nf} - \frac{\lambda e A}{\overline{\lambda+m+1}.\ f}$ comme cy-dessus.

Il eſt aiſé de voir, que ſi l'integrale de la différentielle $(e+fx^n)^m . x^{\lambda n-1} dx$ etoit donnée, on pourroit de la même maniere connoitre l'integrale de $(e+fx^n)^m . x^{\lambda n+rn-1} dx$, r etant un nombre entier poſitif quelconque: il ne faudroit pour cela que ſuppoſer $(e+fx^n)^{m+1} = M$, $\lambda+1=\lambda'$; $\lambda'+1$, ou $\lambda+2=\lambda''$; $\lambda'+1$, ou $\lambda+3=\lambda'''$, & faire les intégrales de $(e+fx^n)^m . x^{\lambda n-1} dx$, $(e+fx^n)^m . x^{\lambda' n-1} dx$, $(e+fx^n)^m . x^{\lambda'' n-1} dx$, $(e+fx^n)^m . x^{\lambda''' n-1} dx$, &c. reſpectivement egales a A, B, C, D, &c. on auroit alors comme cy-deſſus

$$\frac{Mx^{\lambda n}}{\overline{m+\lambda+1}.nf} - \frac{\lambda e A}{\overline{m+\lambda+1}.f} = B$$

$$\frac{Mx^{\lambda' n}}{\overline{m+\lambda+1}.nf} - \frac{\lambda' e B}{\overline{m+\lambda'+1}.f} = C$$

$$\frac{Mx^{\lambda'' n}}{\overline{m+\lambda''+1}.nf} - \frac{\lambda'' e C}{\overline{m+\lambda''+1}.f} = D$$

en ſubſtituant la valeur de B dans la ſeconde equation, on auroit la valeur de C, & en ſubſtituant la valeur de C dans la troiſieme equation, on auroit la valeur de D, & ainſi de ſuite; on formeroit une progreſſion d'intégrales, comme nous avons deja expliqué.

CCXVIII.

THEOREME VI. Supposé que $R = e + fx^n + gx^{2n} + hx^{3n} + \&c.$, & que $S = k + lx^n + mx^{2n} + \&c.$, que l'ordonnée perpendiculaire d'une courbe, dont l'abſciſſe eſt x, ſoit $x^{\theta \pm \sigma n} R^{\lambda \pm \tau} S^{\mu \pm \nu}$, & que les quantités données θ, n, λ, μ, e, f, g, h, k, l, m, &c. demeurant toujours les mêmes dans cette ordonnée, on ſubſtitue ſucceſſivement des nombres entiers quelconques au lieu de σ, τ, & ν; cela etant ſuppoſé, ſi l'on connoit les aires de deux courbes qui naiſſent de ces ſubſtitutions, on pourra trouver les aires de toutes les autres courbes, lorſque R & S ſont des binomes; & ſi on connoit les aires de trois des courbes qui naiſſent de ces ſubſtitutions, on pourra trouver les aires de toutes les autres courbes, lorſque R & S pris enſemble ont cinq termes, c'eſt a dire, lorſque, R etant un binome, S eſt un trinome, ou au contraire; & ſi on connoit les aires de quatre des courbes qui naiſſent de ces ſubſtitutions. On pourra toujours trouver les aires de toutes les autres courbes, lorſque R & S pris enſemble contiennent ſix termes, c'eſt a dire, lorſque l'un des deux eſt un binome & l'autre un quadrinome, & lorſque ce ſont deux trinomes, & ainſi de ſuite a l'infini.

On demontre cette propofition par le Theoreme II. comme on a demontré la precedente par le Theoreme I. il fuffira d'en donner quelques exemples.

Exemple I. Suppofé que R & S foient deux binomes $e+fx^n$, & $k+lx^n$; que les deux aires données foient $A=S.x^{\theta-1}R^{\lambda-1}S^{\mu-1}dx$, & $B=S.x^{\theta+n-1}R^{\lambda-1}S^{\mu-1}dx$ & qu'on veuille trouver la troifieme aire $C=S.x^{\theta+2n-1}R^{\lambda-1}S^{\mu-1}dx$, dans laquelle l'expofant de x dans l'aire B foit augmenté de n. p & q etant des conftantes indeterminées, on aura $pA=S.px^{\theta-1}R^{\lambda-1}S^{\mu-1}dx$; $qB=S.qx^{\theta+n-1}R^{\lambda-1}S^{\mu-1}dx=S.qx^nx^{\theta-1}R^{\lambda-1}S^{\mu-1}dx$, & par le Theoreme II. $x R^\lambda S^\mu =$

$$S.\left\{\begin{matrix}\theta ek & \left.\begin{matrix}+\theta\\+\lambda n\end{matrix}\right\} fkx^n & \left.\begin{matrix}+\theta\\+\lambda n\\+\mu n\end{matrix}\right\} flx^{2n}\\ & \left.\begin{matrix}+\theta\\+\mu n\end{matrix}\right\} lex^n & \end{matrix}\right\} x^{\theta-1}R^{\lambda-1}S^{\mu-1}dx$$

en faifant dans la formule generale du Theoreme II. $g=o=m$, par ce que R, & S font des binomes; donc la fomme des aires $x^\theta R^\lambda S^\mu+pA+qB=$

$$S.\left\{\begin{array}{l} \theta e k \quad \left.\begin{array}{l} +\theta \\ +\lambda n \end{array}\right\} f k x^n \left.\begin{array}{l} +\theta \\ +\lambda n \\ +\mu n \end{array}\right\} f l x^{2n} \\ +p \\ \qquad \left.\begin{array}{l} +\theta \\ +\mu n \end{array}\right\} l e x^n \\ \qquad +q \,.\, x^n \end{array}\right\} x^{\theta-1} R^{\lambda-1} S^{u-1} dx$$

en faiſant evanouïr le premier & le ſecond terme chacun ſeparement, on aura $p = -\theta e k$, & $q = -(\theta + \lambda n) f k - (\theta + \mu n) l e$, & en ecrivant ces valeurs au lieu de p, & q dans l'equation des ſommes des aires, elle deviendra $x^\theta R^\lambda S^u - \theta e k A - (\theta + \lambda n) f k B - (\theta + \mu n) l e B = S.(\theta + \lambda n + \mu n) f l x^{2n} . x^{-1} R^{\lambda-1} S^{u-1} dx = S.(\theta + \lambda n + \mu n) f l x^{\theta+2n-1} R^{\lambda-1} S^{u-1} dx$, & en diviſant de coté & d'autre par $(\theta + \lambda n + \mu n) f l$, on aura la valeur de l'aire C.

EXEMPLE II. Suppoſé que R & S ſoient encore deux binomes, que les deux aires données ſoient $A = S.x^{\theta-1} R^\lambda S^u dx$, & $B = x^{\theta+n-1} R^\lambda S^u dx$, & qu'on veuille trouver les deux autres aires $C = S.x^{\theta-1} R^{\lambda-1} S^u dx$, & $D = S.x^{\theta+n-1} R^{\lambda-1} S^u dx$, en retranchant l'unité de l'expoſant de R dans les deux aires données A & B; p & q etant des conſtantes indeterminées, on aura $p A = S.p x^{\theta-1} R^\lambda S^u dx = S.p R x^{\theta-1} R^{\lambda-1} S^u dx = S.(pe + pf x^n) x^{\theta-1} R^{\lambda-1} S^u dx$; $q B = S.q x^n \times$

$R x^{\theta-1} R^{\lambda-1} S^{\mu} dx = S.(qex^{n} + qfx^{2n}) x^{\theta-1} R^{\lambda-1} S^{\mu-1}$ dx, & (Art. CCV.) en ecrivant $\mu+1$ au lieu de μ dans la formule generale du Theoreme II. on trouve $x^{\theta} R^{\lambda} S^{\mu+1} =$

$$S.\left\{\begin{array}{l} \theta ek \left.\begin{array}{l} +\theta \\ +\lambda n \end{array}\right\} fkx^{n} \left.\begin{array}{l} +\theta \\ +\lambda n \\ +\mu n \\ +n \end{array}\right\} flx^{2n} \\ \left.\begin{array}{l} +\theta \\ +\mu n \\ +n \end{array}\right\} lex^{n} \end{array}\right\} x^{\theta-1} R^{\lambda-1} S^{\mu} dx$$

donc la somme des aires $x^{\theta} R^{\lambda} S^{\mu+1} + pA + qB =$

$$S.\left\{\begin{array}{l} \begin{array}{l} \theta ek \\ +pe \end{array} \left.\begin{array}{l} +\theta \\ +\lambda n \end{array}\right\} fkx^{2n} \left.\begin{array}{l} +\theta \\ +\lambda n \\ +\mu n \\ +n \end{array}\right\} flx^{2n} \\ \left.\begin{array}{l} +\theta \\ +\mu n \\ +n \end{array}\right\} lex^{n} \quad + qf \cdot x^{2n} \\ \left.\begin{array}{l} +qe \\ +pf \end{array}\right\} x^{n} \end{array}\right\} x^{\theta-1} R^{\lambda-1} S^{\mu} dx$$

en egalant a zero le second & le troisieme termes chacun separément, on trouvera les valeurs de p & q, qu'on substituera dans l'equation des sommes des aires; en suite on divisera de coté & d'autre par le premier terme $\theta ek + pe$, après y avoir mis la valeur de p, &

on aura la valeur de l'aire C. Pour trouver la valeur de l'aire D on egalera a zero le premier & le troisieme termes chacun separément, & on determinera par la les valeurs de p & q, qu'on substituera dans l'equation des sommes des aires; en suite on divisera de coté & d'autre par le coefficient du second terme, aprés y avoir mis les valeurs trouvées de p & de q, & on aura la valeur de l'aire D.

CCXIX.

THEOREME VII. Les aires des courbes sont egales, lorsque leurs ordonnées sont en raison reciproque des différentielles des abscisses.

DEMONSTRATION. Soyent y & u les ordonnées respectives de deux courbes, perpendiculaires a leurs abscisses x, z. Si $y : u = dz : dx$, on aura $ydx = udz$, c'est-a-dire, les différentielles des aires, & par consequent les aires mêmes egales entr'elles. *C. Q. F. D.*

CCXX.

COROLLAIRE I. On peut par ce theoreme trouver une infinité de courbes, dont les aires seront egales. Car supposons que ydx soit une différentielle proposée de l'aire d'une courbe, dont l'ordonnée est y, & l'abscisse x, & qu'on veuille trouver une autre courbe d'aire egale, dont l'abscisse soit z, & l'ordonnée u; on formera

formera a volonté une equation entre les abſciſſes x, & z, laquelle nous repreſenterons generalement par $X=Z$, X, & Z etant des fonctions quelconques des abſciſſes x, z. On prendra enſuite la différentielle de part, & d'autre, & ſuppoſant qu'on trouve $X'dx=Z'dz$, X', & Z' etant encore des fonctions de x, & de z, on aura $dz:dx=X':Z'$; enfin on fera cette proportion $X':Z'=y:u=\frac{yZ'}{X'}$; & on aura l'ordonnée u de la nouvelle courbe. Or puiſqu'on a quatre variables x, y, z, u, & trois equations entre ces variables, ſçavoir 1.° l'equation a la premiere courbe entre y, & x; 2.° l'equation ſuppoſée $X=Z$; 3.° l'equation $u=\frac{yZ'}{X'}$; on pourra toujours trouver, par les methodes ordinaires de l'Algebre, une equation a la nouvelle courbe entre l'ordonnée u, & ſon abſciſſe z, & la différentielle udz de l'aire de cette courbe ſera egale a la propoſée ydx.

Ce Corollaire renferme la methode generale de Newton, par laquelle on peut transformer une différentielle propoſée ydx en une infinité d'autres egales, parmi leſquelles on pourra choiſir celles qu'on voudra pour l'intégration. Il faut neantmoins obſerver, qu'il n'eſt pas toujours neceſſaire d'employer tant de calculs pour cette transformation, & que ſouvent il ſuffit de ſuppoſer $x=az^s$, a & s etant des conſtantes indeter-

minées, & de ſubſtituer enſuite dans la différentielle propoſée $y\,dx$, la différentielle $saz^{s-1}\,dz$ au lieu de dx, & az^{s} au lieu de x dans la valeur de y trouvée en x, par l'equation donnée a la premiere courbe, comme on verra dans les Corollaires ſuivants. La methode que nous venons d'expliquer eſt trés elegante, & elle fournit dans des cas difficiles des transformations trés utiles.

CCXXI.

COROLLAIRE II. La différentielle $x^{\theta-1}dx(e+fx^{n}+gx^{2n}+\&c.)^{\lambda}$ de l'aire d' une courbe dont l'abſciſſe eſt x, & l'ordonnée $x^{\theta-1}(e+fx^{n}+gx^{2n}+\&c.)^{\lambda}$, en ſuppoſant $x^{n}=z^{v}$, ou $x=z^{\frac{v}{n}}$ devient $\frac{v}{n}z^{\frac{\theta v-n}{n}}dz\,(e+fz^{v}+gz^{2v}+\&c.)^{\lambda}$; différentielle egale de l'aire d'une courbe, dont l'abſciſſe eſt z, & l'ordonnée $\frac{v}{n}z^{\frac{\theta v-v}{n}}(e+fz^{v}+gz^{2v}+\&c.)^{\lambda}$; car puiſque $x=z^{\frac{v}{n}}$, on aura $x^{\theta-1}=z^{\frac{\theta v-v}{n}}$, & en différentiant $dx=\frac{v}{n}\times z^{\frac{v}{n}-1}dz$, & en ſubſtituant ces valeurs & x^{v} au lieu de x^{n} dans la différentielle propoſée, elle ſe transforme comme nous avons dit.

CCXXII.

COROLLAIRE III. On trouve de la même maniere que la différentielle $x^{\theta-1}dx(a+bx^n+cx^{2n}+\&c.)\times(e+fx^n+gx^{2n}+\&c.)^\lambda$, en supposant $x=z^{\frac{\nu}{n}}$ devient $\frac{\nu}{n}z^{\frac{\theta\nu-n}{n}}dz(a+bz^\nu+cz^{2\nu}+\&c.)(e+fz^\nu+gz^{2\nu}+\&c.)^\lambda$.

CCXXIII.

COROLLAIRE IV. La différentielle $x^{\theta-1}dx\times(a+bx^n+cx^{2n}+\&c.)(e+fx^n+gx^{2n}+\&c.)^\lambda\times(k+lx^n+mx^{2n}+\&c.)^\mu$ par la même supposition de $x=z^{\frac{\nu}{n}}$ devient $\frac{\nu}{n}z^{\frac{\theta\nu-n}{n}}dz(a+bz^\nu+cz^{2\nu}+\&c.)(e+fz^\nu+gz^{2\nu}+\&c.)^\lambda(k+lz^\nu+mz^{2\nu}+\&c.)^\mu$, & ainsi de suite a l'infini.

CCXXIV.

COROLLAIRE V. La différentielle $x^{\theta-1}dx\times(e+fx^n+gx^{2n}+\&c.)^\lambda$ de l'aire d'une courbe dont l'abscisse est x, & l'ordonnée $x^{\theta-1}(e+fx^n+gx^{2n}+\&c.)^\lambda$, en supposant $x=\frac{1}{z}=z^{-1}$, devient $-z^{-\theta-1}\times$

$dz(e+fz^{-n}+gz^{-2n}+\&c.)^{\lambda}$, différentielle d'une autre courbe, dont l'abſciſſe eſt z, & l'ordonnée $\frac{1}{z^{\theta-1}}(e+fz^{-n}+gz^{-2n}+\&c.)^{\lambda}$, ou $\frac{1}{z^{\theta+1+n\lambda}}(f+ez^{n})^{\lambda}$; lorſqu'on a le binome $e+fx^{n}$ dans la parentheſe ſous l'expoſant λ; & $\frac{1}{z^{\theta+1+2n\lambda}}(g+fz^{n}+ez^{2n})^{\lambda}$, lorſqu'on a le trinome $e+fx^{n}+gx^{2n}$ dans la parentheſe ſous l'expoſant λ, & ainſi de ſuite; car, puiſqu'on a ſuppoſé $x=z^{-1}$, on aura $x^{n}=z^{-n}$, $x^{2n}=z^{-2n}$, $x^{\theta-1}=z^{-\theta+1}$, & $dx=-z^{-2}dz$, & en ſubſtituant ces valeurs dans la différentielle propoſée, elle devient $-z^{-\theta-1}dz(e+fz^{-n}+gz^{-2n}+\&c.)^{\lambda}$. Or $e+fz^{-n}=e+\frac{f}{z^{n}}=\frac{ez^{n}+f}{z^{n}}$, & $(e+fz^{-n})^{\lambda}=\frac{(ez^{n}+f)^{\lambda}}{z^{n\lambda}}$; par conſequent $-z^{-\theta-1}dz(e+fz^{-n})^{\lambda}=-z^{-\theta-1}\times dz\frac{(ez^{n}+f)^{\lambda}}{z^{n\lambda}}=-z^{-\theta-1-n\lambda}dz(ez^{n}+f)^{\lambda}=\frac{-dz}{z^{\theta+1+n\lambda}}(ez^{n}+f)^{\lambda}$. On trouve de même $e+fz^{-n}+gz^{-2n}=\frac{ez^{2n}+fz^{n}+g}{z^{2n}}$; $(e+fz^{-n}+gz^{-2n})^{\lambda}=\frac{(g+fz^{n}+ez^{2n})^{\lambda}}{z^{2n\lambda}}$; & $-z^{-\theta-1}dz(e+fz^{-n}+gz^{-2n})^{\lambda}=$

$-z^{-\theta-1-2n\lambda}dz(g+fz^n+ez^{2n})^\lambda = \frac{-dz}{z^{\theta+1+2n\lambda}} \times$ $(g+fz^n+ez^{2n})^\lambda$, & ainſi de ſuite.

CCXXV.

COROLLAIRE VI. La différentielle $x^{\theta-1}dx(e+fx^n+gx^{2n}+\&c.)^\lambda(k+lx^n+mx^{2n}+\&c.)^\mu$ en ſuppoſant $x=\frac{1}{z}$ devient $-z^{-\theta-1}dz(e+fz^{-n}+gz^{-2n}+\&c.)^\lambda(k+lz^{-n}+mz^{-2n}+\&c.)^\mu$ différentielle de l'aire egale d'une autre courbe, dont l'abſciſſe eſt z, & l'ordonnée $\frac{1}{z^{\theta+1}}(e+fz^{-n}+gz^{-2n})^\lambda(k+lz^{-n}+mz^{-2n}+\&c.)^\mu$, ou $\frac{1}{z^{\theta+1+n\lambda+n\mu}}(f+ez^n)^\lambda(l+kz^n)^\mu$, lorſque les polynomes renfermés dans les parentheſes ſous les expoſans λ & μ ſont deux binomes $e+fx^n$, & $k+lx^n$, & $\frac{1}{z^{\theta+1+2n\lambda+n\mu}}(g+fz^n+ez^{2n})^\lambda \times (l+kz^n)^\mu$, lorſque le polynome dans la parentheſe ſous l'expoſant λ eſt un trinome $e+fx^n+gx^{2n}$, & l'autre un binome $k+lx^n$; on demontre ce Corollaire comme le precedent.

Il faut obſerver que dans ces deux derniers Corollaires, les différentielles des deux aires egales ayant des ſignes contraires $+$ & $-$ a cauſe de la ſuppoſition $x=\frac{1}{z}$, qui donne

$dx = -\frac{dz}{zz}$, les deux aires egales doivent être priſes en ſens contraire par rapport aux ordonnées, de ſorte que, ſi l'une des deux aires eſt priſe le long de l'abſciſſe dans une des deux courbes, l'autre aire egale doit être priſe le long de l'abſciſſe prolongée au dela de l'ordonnée dans l'autre courbe mais on evite tout embaras dans ces occaſions, en ajoutant une conſtante indeterminée a l'intégrale de la différentielle transformée, & en determinant enſuite cette conſtante par la regle que nous avons donnée (Art. XIV.).

CCXXVI.

COROLLAIRE VII. Si le rapport entre l'ordonnée y, & l'abſciſſe x d'une courbe eſt exprimé par une equation affectée de cette forme $y^{\alpha}(e + fy^{n}x^{\delta} + gy^{2n}x^{2\delta} + hy^{3n}x^{3\delta} + \&c.) = x^{\beta}(k + ly^{n}x^{\delta} + my^{2n}x^{2\delta} + \&c.)$, en ſuppoſant $s = \frac{n-\delta}{n}$; $z = \frac{1}{s}x^{s}$, & $\lambda = \frac{n-\delta}{\alpha\delta + \beta n}$, la différentielle ydx de l'aire de cette courbe deviendra egale a la différentielle udz de l'aire d'une autre courbe dont l'abſciſſe ſera z, & l'ordonnée u, & l'equation non affectée $\frac{1}{s}u^{\alpha\lambda}(e + fu^{n} + gu^{2n} + \&c.)^{\lambda}(k + lu^{n} + mu^{2n} + \&c.)^{-\lambda} = z$; car puiſqu'on a ſuppoſé $z = \frac{1}{s}x^{s}$, en différentiant on aura $dz = x^{s-1}dx$, & $dz : dx = x^{s-1} : 1$.

Si donc on ſuppoſe encore $x^{s-1}:1=y:u$, on aura $\frac{y}{x^{s-1}}$ $=u$ ordonnée d'un autre courbe d'aire egale a la propoſée, dont l'abſciſſe ſera z (Cor. I.); or ſi, au lieu de y, on ſubſtitue ſa valeur ux^{s-1} dans l'equation a la premiere courbe, cette equation deviendra $u^{\alpha}x^{s\alpha-\alpha}(e+fu^{n}x^{sn-n+\delta}+gu^{2n}x^{2sn-2n+2\delta}+\&c.=x^{\beta}(k+lu^{n}\times x^{sn-n+\delta}+mu^{2n}x^{2sn-2n+2\delta}+\&c.)$, & par ce que $s=\frac{n-\delta}{n}$ & par conſequent $sn=n-\delta$, cette equation, en ſubſtituant $n-\delta$ au lieu de sn, deviendra $u^{\alpha}x^{s\alpha-\alpha}(e+fu^{n}+gu^{2n}+\&c.)=x^{\beta}(k+lu^{n}+mu^{2n}+\&c.)$, & par la diviſion elle ſe change en

$u^{\alpha}\cdot\frac{e+fu^{n}+gu^{2n}+\&c.}{k+lu^{n}+mu^{2n}+\&c.}=x^{\beta+\alpha-s\alpha}=x^{\frac{n\beta+\delta\alpha}{n}}$, a cauſe de $\alpha-s\alpha=\alpha(1-s)$, & de $1-s=1-\frac{n}{n}+\frac{\delta}{n}=\frac{\delta}{n}$;

mais on a ſuppoſé $x^{s}=sz$, d'ou l'on tire $x=(sz)^{\frac{1}{s}}$, $x^{\frac{n\beta+\delta\alpha}{n}}=(sz)^{\frac{n\beta+\delta\alpha}{sn}}=(sz)^{\frac{1}{\lambda}}$, a cauſe de $\lambda=\frac{n-\delta}{\alpha\delta+\beta n}$ & de $sn=n-\delta$; donc l'equation ſera $u^{\alpha}\times\frac{e+fu^{n}+gu^{2n}+\&c.}{k+lu^{n}+mu^{2n}+\&c.}=(sz)^{\frac{1}{\lambda}}$, & en elevant de part &

d'autre a la puiſſance λ, on aura $u^{\alpha\lambda}\left(\frac{e+fu^n+gu^{2n}+\&c.}{k+lu^n+gu^{2n}+\&c.}\right)^\lambda = sz$, & en diviſant par s on aura $\frac{1}{s}u^{\alpha\lambda} \times \frac{(e+fu^n+gu^{2n}+\&c.)^\lambda}{(k+lu^n+mu^{2n}+\&c.)^\lambda} = z$.

Nous aurions pû nous etendre fort utilement ſur ce beau Corollaire de Newton, & en demontrer l'uſage dans les equations différentielles a pluſieurs variables, & dans leſquelles ces variables ſont mêlées enſemble; mais cette matiere appartient a la ſeconde partie de nôtre ouvrage, dans laquelle nous la traiterons expreſſément.

CCXXVII.

COROLLAIRE VIII. Si le rapport entre l'ordonnée y & l'abſciſſe x d'une courbe eſt exprimée par l'equation affectée $y^\alpha(e+fy^n x^\delta+gy^{2n}x^{2\delta}+\&c.) = x^\beta \times (k+ly^n x^\delta+my^{2n}x^{2\delta}+\&c.)+x^\gamma(p+qy^n x^\delta+ry^{2n}x^{2\delta}+\&c.)$, en ſuppoſant $s=\frac{n-\delta}{n}$, $z=\frac{1}{s}x^s$, $\mu=\frac{\alpha\delta+\beta n}{n-\delta}$, & $\nu=\frac{\sigma\delta+\gamma\alpha}{n-\delta}$, la différentielle $y\,dx$ de l'aire de cette courbe deviendra egale a la différentielle $u\,dz$ de l'aire d'une autre courbe dont l'abſciſſe ſera z, l'ordonnée u & l'equation $u^\alpha(e+fu^n+gu^{2n}+\&c.) = S^\mu z^\mu(k+lu^n+mu^{2n}+\&c.)+s^\nu x^\nu(p+qu^n+ru^{2n}+\&c.)$.

$+$ &c.). La demonſtration eſt a peu près la même que celle du Corollaire precedent. Car puiſque $z = \frac{1}{s} x^s$, on aura $dz = x^{s-1} dx$, $dz : dx = x^{s-1} : 1$; &, en ſuppoſant $x^{s-1} : 1 = y : u$, on aura $\frac{y}{x^{s-1}} = u$, ordonnée d'une autre courbe d'aire egale a la propoſée, dont l'abſciſſe ſera z, &, en ſubſtituant $u x^{s-1}$ au lieu de y dans l'equation a la premiere courbe, elle deviendra $u^\alpha x^{su-\alpha} (e + f u^n x^{sn-n+\delta} + g u^{2n} x^{2sn-2n+2\delta} +$ &c.$) = x^\beta \times (k + l u^n x^{sn-n+\delta} + m u^{2n} x^{2sn-2n+2\delta} +$ &c.$) + x^\gamma (p + q u^n x^{sn-n+\delta} + r u^{2n} x^{2sn-2n+2\delta} +$ &c.$)$, ou bien, a cauſe de $sn = n - \delta$, $u^\alpha x^{s\alpha-\alpha} (e + f u^n + g u^{2n} +$ &c.$) = x^\beta (k + l u^n + g u^{2n} +$ &c.$) + x^\gamma (p + q u^n + r u^{2n} +$ &c.$)$, &, en diviſant par $x^{s\alpha-\alpha}$, on aura $u^\alpha (e + f u^n + g u^{2n} +$ &c.$) = x^{\beta+\alpha-s\alpha} (k + l u^n + m u^{2n} +$ &c.$) + x^{\gamma+\alpha-s\alpha} (p + q u^n + r u^{2n} +$ &c.$)$; or, par ce que $sz = x^s$, on aura $(sz)^{\frac{1}{s}} = x$, $x^{\beta+\alpha-s\alpha} = (sz)^{\frac{\beta+\alpha-s\alpha}{s}}$, & $x^{\gamma+\alpha-s\alpha} = (sz)^{\frac{\gamma+\alpha-s\alpha}{s}}$, & par ce que $s = \frac{n-\delta}{n}$, on trouve $\frac{\beta+\alpha-s\alpha}{s} = \frac{\beta n+\alpha\delta}{n-\delta} =$

μ & $\frac{\gamma+1-s\alpha}{\delta}=\frac{\gamma n+\alpha\delta}{n-\delta}=\nu$. Donc, en ſubſtituant ces valeurs dans la derniere equation a la ſeconde courbe, elle ſera $u^{o}(e+fu^{n}+gu^{2n}+\&c.)=s^{\mu}z^{\mu}(k+lu^{n}+gu^{2n}+\&c.)+S^{\nu}u^{\nu}(p+qu^{n}+ru^{2n}+\&c.)$.

CCXXVIII.

COROLLAIRE IX. La différentielle ydx d'une courbe dont l'abſciſſe eſt x, & l'ordonnée $y=\pi x^{\lambda r-1}\times(re+\overline{r+n}.fx^{n}+\overline{r+2n}.gx^{2n}+\&c.)(e+fx^{n}+gx^{2n}+\&c.)^{\lambda-1}(a+b(ex^{r}+fx^{r+n}+gx^{r+2n}+\&c.)^{\tau})^{\mu}$, en ſuppoſant $z=(ex^{r}+fx^{r+n}+gx^{r+2n}+\&c.)^{\pi}$ $\sigma=\frac{\tau}{\pi}$, & $\vartheta=\frac{\lambda-\pi}{\pi}$; devient egale a la différentielle $z^{\vartheta}dz(a+bz^{\sigma})^{\mu}$ de l'aire d'une autre courbe, dont l'abſciſſe eſt z, & l'ordonnée $z^{\vartheta}(a+bz^{\sigma})^{\mu}$. Car, puiſqu'on a ſuppoſé $z=(ex^{r}+fx^{r+n}+gx^{r+2n}+\&c.)^{\pi}$, on aura $z^{\frac{1}{\pi}}=ex^{r}+fx^{r+n}+gx^{r+2n}+\&c.$, & en différentiant de part & d'autre $\frac{1}{\pi}z^{\frac{1-\pi}{\pi}}dz=x^{r-1}dx\times(re+\overline{r+n}.fx^{n}+\overline{r+2n}.gx^{2n}+\&c.)$, d'où l'on tire cette proportion $dz:dx=\pi x^{r-1}(re+\overline{r+n}.fx^{n}$

$+\overline{r+2n}.gx^{2n}+\&c.):z^{\frac{1-\pi}{\pi}}$. Donc, si l'on appelle u l'ordonnée d'une nouvelle courbe, dont l'abscisse soit z, & l'aire egale a celle de la premiere courbe, on aura cette proportion $\pi x^{r-1}(re+\overline{r+n}.fx^n+\overline{r+2n}.gx^{2n}+\&c.):z^{\frac{1-\pi}{\pi}}=\pi x^{\lambda r-1}(re+\overline{r+n}.fx^n+\overline{r+2n}.gx^{2n}+\&c.)(e+fx^n+gx^{2n}+\&c.)^{\lambda-1}\times(a+b(ex^r+fx^{r+n}+gx^{r+2n}+\&c.)^\tau)^\omega:u$; & en divisaut les antecedents par $\pi(re+\overline{r+n}.fx^n+\overline{r+2n}.gx^{2n}+\&c.)$, on aura $x^{r-1}:z^{\frac{1-\pi}{\pi}}=x^{\lambda r-1}\times(e+fx^n+gx^{2n}+\&c.)^{\lambda-1}(a+b(ex^r+fx^{r+n}+gx^{r+2n}+\&c.)^\tau)^\omega:u$, & en substituant dans le second antecedent de cette proportion $z^{\frac{1}{\pi}}$, au lieu de $ex^r+fx^{r+n}+gx^{r+2n}+\&c.$, on aura $x^{r-1}:z^{\frac{1-\pi}{\pi}}=x^{\lambda r-1}(e+fx^n+gx^{2n}+\&c.)^{\lambda-1}(a+bz^{\frac{\tau}{\pi}})^\omega:u$, par consequent l'ordonnée $u=z^{\frac{1-\pi}{\pi}}.x^{\lambda r-r}(e+fx^n+gx^{2n}+\&c.)^{\lambda-1}.(a+bz^{\frac{\tau}{\pi}})^\omega=z^{\frac{1-\pi}{\pi}}(ex^r+fx^{r+n}+gx^{r+2n}+\&c.)^{\lambda-1}(a+bz^{\frac{\tau}{\pi}})^\omega$, puisque $x^{\lambda r-r}=$

$x^{r.\overline{\lambda-1}}$, & par conſequent $x^{\lambda r-r}(e+fx^{n}+gx^{2n}+\&c.)^{\lambda-1}=(ex^{r}+fx^{r+n}+gx^{r+2n}+\&c.)^{\lambda-1}$; puis donc que $z^{\frac{1}{\pi}}=ex^{r}+fx^{r+n}+gx^{r+2n}+\&c.$, & que par conſequent $z^{\frac{\lambda-1}{\pi}}=(ex^{r}+fx^{r+n}+gx^{r+2n}+\&c.)^{\lambda-1}$, on aura l'ordonnée $u=z^{\frac{1-\pi}{\pi}}.z^{\frac{\lambda-1}{\pi}}\times(a+bz^{\frac{\tau}{\pi}})^{\omega}=z^{\frac{\lambda-\pi}{\pi}}(a+bz^{\frac{\tau}{\pi}})^{\omega}=z^{\vartheta}(a+bz^{\sigma})^{\omega}$, en ſuppoſant $\sigma=\frac{\tau}{\pi}$, & $\vartheta=\frac{\lambda-\pi}{\pi}$.

On voit bien que la premiere ordonnée y dans ce Corollaire devient plus ſimple en ſuppoſant $\lambda=1$, ou $\tau=1$, & en faiſant qu'on puiſſe tirer la racine de la puiſſance dont l'expoſant eſt ω, ou encore en ſuppoſant $\omega=-1$, & $\lambda=1=r=\sigma=\pi$, ſans parler des autres cas.

CCXXIX.

COROLLAIRE X. Si on ſuppoſe $ex^{\nu}+fx^{\nu+n}+gx^{\nu+2n}+\&c.=R$; $\nu e+\overline{\nu+n}.fx^{\nu+n-1}+\overline{\nu+2n}.gx^{\nu+2n-1}+\&c.=r$; $k+lx^{n}+mx^{2n}+\&c.=S$; & $nlx^{n-1}+2nmx^{2n-1}+\&c.=s$, & que l'abſciſſe d'une courbe ſoit x, ſon ordonnée $y=(\eta Sr+\varphi Rs)\times R^{\lambda-1}S^{\mu-1}(aS^{\eta}+bR^{\varphi})^{\omega}$, la différentielle ydx de

l'aire de cette courbe ſera egale a la différentielle d'une autre courbe, dont l'abſciſſe ſera z, & l'ordonnée $z^{\vartheta}(a+bz^{\sigma})^{\omega}$, en ſuppoſaut $\frac{\mu+n\omega}{\lambda}=\frac{\varphi}{\pi}=-\frac{\mu}{\tau}$; $\frac{\tau}{\pi}=\sigma$, $\frac{\lambda-\pi}{\pi}=\vartheta$, & $R^{\pi}S^{\varphi}=z$.

Car puiſque, par la ſuppoſition, $ex^{\nu}+fx^{\nu+n}+gx^{\nu+2n}+$ &c. $=R$, on aura en différentiant $\nu ex^{\nu-1}\times dx+\overline{\nu+n}\,.\,fx^{\nu+n-1}dx+\overline{\nu+2n}\,.\,gx^{\nu+2n-1}dx+$ &c. $=dR=rdx$, en ſubſtituant r au lieu de $\nu ex^{\nu-1}+\overline{n+\nu}\,.\,fx^{\nu+n-1}+\overline{\nu+2n}\,.\,gx^{\nu+2n-1}+$ &c. de même, puiſque, par la ſuppoſition, $k+lx^{n}+mx^{2n}+$ &c. $=S$, on aura en différentiant, $nlx^{n-1}dx+2nmx^{n-1}dx+$ &c. $=dS=sdx$, en ſubſtituant S au lieu de $nlx^{n-1}+2nmx^{2n-1}+$ &c.; & par ce que (Supp.) $R^{\pi}S^{\varphi}=z$, on aura en différentiant $\pi R^{\pi-1}\times S^{\varphi}dR+\varphi S^{\varphi-1}R^{\pi}dS=dz$, & en ſubſtituant rdx au lieu de dR, & sdx au lieu de dS, on aura $(\pi Sr+\varphi Rs)R^{\pi-1}S^{\varphi-1}dx=dz$; d'ou l'on tire cette proportion $dz:dx=(\pi Sr+\varphi Rs)R^{\pi-1}S^{\varphi-1}:1$. Donc, ſi on deſigne par V l'ordonnée d'une nouvelle courbe, dont l'abſciſſe ſoit z, & l'aire egale a celle de la premiere courbe, on aura (Cor. I.) cette proportion $(\pi Sr+\varphi Rs)R^{\pi-1}S^{\varphi-1}:1=(\pi Sr+\varphi Rs)R^{\lambda-1}\times$

$S^{\mu-1}(aS^{\mu}+bR^{\tau})^{\omega}$: $V = R^{\lambda-\pi}S^{\mu-\phi}(aS^{\mu}+bR^{\tau})^{\omega} =$

$R^{\lambda-\pi}\left(aS^{\mu+\frac{\mu-\phi}{\omega}}+bR^{\tau}S^{\frac{\mu-\phi}{\omega}}\right)^{\omega}$, en divisant hors de la parenthese par $S^{\mu-\phi}$, & multipliant dans la parenthese par la même quantité $S^{\mu-\phi}$, ce qui ne change point la valeur de l'ordonnée V, ou $R^{\lambda-\pi}S^{\mu-\phi}(aS^{\mu}+bR^{\tau})^{\omega}$. Or puisqu'on a supposé $R^{\pi}S^{\phi}=z$, & $\vartheta=\frac{\lambda-\pi}{\pi}$, on aura $z^{\vartheta}=z^{\frac{\lambda-\pi}{\pi}}=R^{\lambda-\pi}S^{\frac{\phi\lambda-\phi\pi}{\pi}}$, & $z^{\sigma}=z^{\frac{\tau}{\pi}}=R^{\tau}S^{\frac{\phi\tau}{\pi}}$; par consequent $z^{\vartheta}(a+bz^{\sigma})^{\omega}=R^{\lambda-\pi}\times S^{\frac{\phi\lambda-\phi\pi}{\pi}}\left(a+bR^{\tau}S^{\frac{\phi\tau}{\pi}}\right)^{\omega}=R^{\lambda-\pi}\left(aS^{\frac{\phi\lambda-\phi\pi}{\pi\omega}}+bR^{\tau}S^{\frac{\phi\tau}{\pi}+\frac{\phi\lambda-\phi\pi}{\pi\omega}}\right)^{\omega}$, en divisant hors de la parenthese, & multipliant dans la parenthese par la même quantité. Il ne reste donc plus qu'à demontrer que la quantité $R^{\lambda-\pi}\left(aS^{\mu+\frac{\mu-\phi}{\omega}}+bR^{\tau}S^{\frac{\mu-\phi}{\omega}}\right)^{\omega}$ est egale a la quantité $R^{\lambda-\pi}\left(aS^{\frac{\phi\lambda-\phi\pi}{\pi\omega}}+bR^{\tau}S^{\frac{\phi\tau}{\pi}+\frac{\phi\lambda-\phi\pi}{\pi\omega}}\right)^{\omega}$; or ces quantités sont egales en supposant $\mu+\frac{\mu-\phi}{\omega}=\frac{\phi\lambda-\phi\pi}{\pi\omega}$,

& $\frac{\mu-\theta}{\omega}=\frac{\theta\tau}{\pi}+\frac{\theta\lambda-\theta\tau}{\pi\omega}$. La premiere equation donne $\frac{u+n\omega}{\lambda}=\frac{\theta}{\pi}$, comme on l'a ſuppoſé dans l'enonçé du Corollaire & les deux equations comparées donnent $\frac{\tau}{\pi}=-\frac{u}{\varphi}$, comme on l'a encore ſuppoſé. Donc, en faiſant ces ſuppoſitions, on aura l'ordonnée $V=z^{\vartheta}(a+bz^{\sigma})^{\omega}$.

Il eſt evident que la premiere ordonnée y dans ce Corollaire devient plus ſimple en ſuppoſant $\tau=1$, $u=1$, ou $\lambda=1$, $\mu=1$, & en faiſant qu'on puiſſe extraire la racine de la puiſſance dont l'expoſant eſt ω, ou en faiſant $\omega=-1$, ou $\mu=\omega$, ſans parler de pluſieurs autres Cas.

Si, au lieu de ſuppoſer l'ordonnée $y=(\pi Sr+\varphi Rs)R^{\lambda-1}S^{u-1}(aS^{n}+bR^{\tau})^{\omega}$, on la ſuppoſoit $=(\pi Sr+\varphi Rs)R^{\lambda-1}S^{u-1}(aS^{-n}+bR^{\tau})^{\omega}$ en faiſant $\frac{\mu-n\omega}{\lambda}=\frac{u}{\tau}=\frac{\theta}{\pi}$, $\frac{\tau}{\pi}=\sigma$, $\frac{\lambda-\tau}{\pi}=\vartheta$, & $R^{\tau}S^{\theta}=z$, la différentielle de l'aire de cette courbe ſera egale, comme cy-deſſus a la différentielle $z^{\vartheta}dz(a+bz^{\sigma})^{\omega}$ de l'aire d'une autre courbe, dont l'abſciſſe etant z, l'ordonnée ſera, comme auparavant, $z^{\vartheta}(a+bz^{\sigma})^{\omega}$; il ne faut

pour cela que repeter le calcul, en faiſant les nouvelles ſubſtitutions.

CCXXX.

PROBLEME II. Trouver les courbes les plus ſimples avec lesquelles on puiſſe comparer geometriquement une courbe quelconque, dont l'ordonnée y eſt determinée par l'abſciſſe x au moyen d'une equation non affectée; ou, ce qui revient au même, y etant une fonction algebrique de x, trouver l'intégrale de la différentielle ydx par les quadratures des courbes les plus ſimples, dont elle peut dependre.

CAS I. Soit l'ordonnée $y = ax^{\theta - 1}$, ou la différentielle $ydx = ax^{\theta - 1}dx$, & l'aire de la courbe ou l'intégrale $S. ydx$ ſera $\frac{a}{\theta}x^{\theta}$. Newton deduit cette intégrale du Theoreme III. en comparant l'ordonnée propoſée $ax^{\theta - 1}$ avec l'ordonnée generale de ce Theoreme $x^{\theta - 1}$ $R^{\lambda - 1}(a + bx^{n} + cx^{2n} + \&c.)$, dans laquelle $R = e + fx^{n} + gx^{2n} + \&c.$ On trouve par cette comparaiſon $b = o = c = f = g$, & $e = 1 = R$. En ſubſtituant ces valeurs dans la formule generale de l'aire $x^{\theta}R^{\lambda}\Big(\frac{\frac{1}{n}a}{re} +$

$\frac{\frac{1}{n}b - sfA}{\overline{r+1}.e} x^n + \&c.$), elle devient $\frac{x^\theta . \frac{1}{n} a}{re} = \frac{a}{\theta} x^\theta$ a cauſe de $\frac{\theta}{n} = r$, & de $e = 1$.

CAS II. Soit l'ordonnée $y = a x^{\theta - 1} (e + f x^n + g x^{2n} + \&c.)^{\lambda - 1}$; ſi on peut trouver l'intégrale $S. y dx$ algebriquement, ou par les aires des figures rectilignes, on la trouvera par le Theor. III., en comparant comme dans le premier Cas l'ordonnée propoſée $a x^{\theta - 1} \times (e + f x^n + g x^{2n} + \&c.)^{\lambda - 1}$ avec l'ordonnée generale de ce Theoreme, ce qui donnera $b = o = c$, & par conſequent l'aire $S. y dx = x^\theta R^\lambda (\frac{\frac{1}{n} a}{re} - \frac{sfA}{\overline{r+1}.e} x^n$ $\frac{-(s+1)fB - tgA}{\overline{r+2}.e} x^{2n} \&c.)$. Mais ſi cette intégrale n'eſt point algebrique, on changera la premiere courbe en une autre d'aire egale, dont l'abſciſſe ſera z, & l'ordonnée $\frac{a}{n} z^{\frac{\theta - n}{n}} (e + f z + g z^2 + \&c.)^{\lambda - 1}$, en ſuppoſant $x^n = z$ (Art. CCXX.), on rendra enſuite (Art. CCXII.) les puiſſances dont les expoſans ſont $\frac{\theta - n}{n}$, & $\lambda - 1$ les plus petites qu'il ſera poſſible, en retranchant de ces expoſans autant d'unités qu'il faudra, & on parviendra par la a reduire la quadrature de la courbe propoſée aux quadratures des courbes les plus ſimples qu'on

puisse trouver par ce moyen. Après quoi en supposant $z = \frac{1}{u}$ (Art. CCXXIV.), on pourra transformer chacune de ces courbes en une autre courbe, qui sera quelque fois plus simple. Enfin on pourra encore quelque fois simplifier ces courbes par le Theor. I. comparé avec les Corollaires IX., & X. du Theoreme precedent; car il peut arriver que les ordonnées de ces courbes soient de telle forme, qu'en leur ajoutant avec le signe +, ou − l'ordonnée d'une autre courbe quarrable, qu'on pourra trouver par le Theor. I., elles acquierent les formes plus simples des Corollaires IX., & X. du Theoreme precedent; & alors, quand on aura trouvé leurs aires, il faudra en retrancher les aires des courbes quarrables, dont on aura ajouté les ordonnées; enfin on remontera des aires les plus simples, qu'on aura trouvé par ces moyens, a l'aire de la courbe proposée, comme on l'a vû dans le Theoreme V.

CAS III. Soit l'ordonnée $y = x^{\theta-1}(a + bx^n + cx^{2n} + \&c.)(e + fx^n + gx^{2n} + \&c.)^{\lambda-1}$; si on peut trouver algebriquement l'aire de cette courbe, ou l'intégrale $S.ydx$, on la trouvera par le Theor. III., sinon il faudra decomposer l'ordonnée en ses parties $x^{\theta-1}a(e + fx^n + gx^{2n} + \&c.)^{\lambda-1} + x^{\theta-1}bx^n(e + fx^n + gx^{2n} + \&c.)^{\lambda-1} + x^{\theta-1}cx^{2n}(e + fx^n + gx^{2n} + \&c.)^{\lambda-1} + \&c.$, & chercher par le second Cas les courbes les

plus ſimples, avec lesquelles on puiſſe comparer les courbes qui ont pour ordonnées chacune de ces parties; car les aires de ces courbes particulieres etant jointes enſemble avec leurs ſignes + & — formeront l'aire totale de la courbe propoſée.

CAS IV. Soit l'ordonnée $y = x^{\theta - 1} (a + b x^n + c x^{2n} + \&c.) (e + f x^n + g x^{2n} + \&c.)^{\lambda - 1} (k + l x^n + m x^{2n} + \&c.)^{\mu - 1}$; ſi cette courbe eſt quarrable algebriquement, on trouvera ſon aire $S. y dx$ par le Theor. IV., ſinon on la transformera en une courbe plus ſimple par le Cor. IV. du Theoreme VII., & on la comparera enſuite avec les courbes les plus ſimples par le Theoreme VI., & par les Corollaires VI., IX., & X. du Theoreme VII., comme dans les Cas II., & III.

CAS V. Si l'ordonnée y eſt compoſée de differentes parties, on regardera chacune de ces parties comme l'ordonnée d'une courbe particuliere, & on cherchera ſeparément les aires algebriques de chacune de ces courbes, & lorſqu'on les aura trouvées, on ôtera leurs ordonnées de l'ordonnée totale y de la courbe propoſée; & enſuite on cherchera l'aire de la courbe, dont l'ordonnée ſera ce qui reſtera aprés cette ſouſtraction, comme dans les Cas II., III., & IV. & la ſomme de toutes les aires qu'on aura trouvées ſera l'aire de la courbe propoſée.

Ce Probleme qui contient en abregé toute la theorie de la quadrature des courbes, quoique demontré icy generalement, deviendra plus clair par l'Article II., & ſur tout par les exemples de l'Article III. de ce Chapitre.

CCXXXI.

COROLLAIRE I. Toute courbe, dont l'ordonnée eſt la racine quarrée affectée de ſon equation avec l'abſciſſe, peut être comparée par ce Probleme avec les figures les plus ſimples rectilignes, ou curvilignes, dont la quadrature depend. Car cette racine eſt toujours compoſée de deux parties, dont chacune, priſe ſeparément, n'eſt point une racine affectée d'equations. Par exemple, etant propoſée l'equation $a^2y^2 + x^2y^2 = 2a^3y + 2x^3y - x^4$; on trouvera ſa racine $y = \frac{a^3 + x^3 + a\sqrt{a^4 + 2ax^3 - x^4}}{aa + xx}$, dont la partie rationelle $\frac{a^3 + x^3}{a^2 + x^2}$, & la partie irrationelle $\frac{a\sqrt{a^4 + 2ax^3 - x^4}}{aa + xx}$ ſont les ordonnées de deux courbes qu'on peut quarrer par ce Probleme, ou comparer avec les figures les plus ſimples dont elles dependent. Car la différentielle $\frac{x^3dx + a^3dx}{xx + aa} = xdx - \frac{aaxdx}{aa + xx} + \frac{a^3dx}{xx + aa}$; or l'intégrale $S.\ xdx = \frac{1}{2}xx$, l'intégrale $S.\ \frac{a^3dx}{aa + xx} = a.\ S.\frac{aadx}{aa + xx} =$

aA, A etant un arc de cercle, dont le rayon eſt A, & la tangente x; & l'intégrale $S. \frac{aaxdx}{aa+xx} = \frac{1}{2}aa. L. (aa+xx)$, en prenant le logarithme hyperbolique, & la différentielle $\frac{adx\sqrt{a^4+2ax^3-x^4}}{aa+xx} = adx(a^4+2ax^3-x^4)^{\frac{1}{2}}(aa+xx)^{-1}$ peut-être rapportée par le troiſieme Cas aux figures les plus ſimples, dont ſon intégrale depend.

CCXXXII.

COROLLAIRE II. Toute courbe dont l'ordonnée eſt determinée par une equation affectée, qu'on peut reduire par le Corollaire VII. du theoreme precedent a une equation non affectée, pourra être quarrée algebriquement par ce probleme, ſi elle eſt quarrable, ou être comparée avec les figures les plus ſimples, dont ſa quadrature depend; & on pourra quarrer de cette maniere toute courbe dont l'equation n'a que trois termes. Car cette equation ſi elle eſt affectée, ſe transforme en une equation non affectée par le Corollaire VII. du Theoreme precedent; enſuite on la reduit a l'equation la plus ſimple par les Corollaires II. & V. du même Theoreme, & enfin on trouve la quadrature de la courbe, ou on la reduit a celle de la courbe la plus ſimple par le probleme.

On peut demontrer ainſi la derniere partie de ce Corollaire. On ſçait que toute equation de trois termes peut ſe reduire a cette forme $ey^{\alpha} = x^{\beta}(k + ly^{n}x^{\delta})$, qui eſt contenue dans l'equation generale du Corollaire VII. $y^{\alpha}(e + fy^{n}x^{\delta} + \&c.) = x^{\beta}(k + ly^{n}x^{\delta} + my^{2n}x^{2\delta} + \&c.)$, en faiſant $f = o = g = m$ &c. Donc ſi on ſuppoſe, comme dans le Corollaire VII. $s = \frac{n - \delta}{n}$, $z = \frac{1}{s}x^{s}$, & $\lambda = \frac{n - \delta}{\alpha\delta + \beta n}$, l'equation propoſée deviendra $\frac{\frac{1}{s}u^{\alpha\lambda}e^{\lambda}}{(k + lu^{n})^{\lambda}} = z$, & la différentielle de l'aire de la courbe ſera $udz = \frac{\frac{1}{s}\alpha\lambda e^{\lambda}u^{\alpha\lambda}du}{(k + lu^{n})^{\lambda}} - \frac{\frac{1}{s}\lambda lne^{\lambda}u^{\alpha\lambda + n}du}{(k + lu^{n})^{\lambda + 1}}$. Or l'intégration de ces deux termes depend par le Theoreme V. de l'intégration de la différentielle $\frac{u^{\alpha\lambda}du}{(k + lu^{n})^{\lambda}}$, qu'on peut facilement trouver ou algebriquement, ou par la quadrature des courbes les plus ſimples, lorſque les expoſans α, λ, & n ſont donnés en nombres.

On peut auſſi en ſuppoſant $u^{n} = \pi^{\nu}$, ou $u^{n} = \pi$, comme dans le Corollaire II. rendre la différentielle $\frac{u^{\alpha\lambda}du}{(k + lu^{n})}$ plus ſimple.

CCXXXV.

COROLLAIRE III. Toute courbe dont l'ordonnée est determinée par une equation affectée quelconque, qu'on peut transformer par le Corollaire IX. du Theoreme precedent en une equation de deux dimensions, peut-être quarrée par le Probleme precedent, & par le premier Corollaire, ou comparée avec les courbes les plus simples dont sa quadrature depend.

On comprend par ce que nous avons demontré, surtout dans le second Corollaire, comment Newton pouvoit ecrire a Collins l'année *1676.*: *Nulla extat curva, cujus æquatio ex tribus constat terminis, in quâ licet quantitates incognitæ se mutuò afficiant, vel indices dignitatum sint surdæ quantitates, verbi gratiâ,* $ax^{\lambda} + bx^{\mu}y^{\sigma} + cy^{\tau} = 0$, *ubi* x *designant basim,* y *ordinatam,* λ, μ, σ, τ *indices dignitatum ipsius* x *&* y, *&* a, b, c *quantitates cognitas cùm signis suis* + *vel* −; *nulla, inquam, est hujusmodi curva, de quâ, an quadrari possit, nec ne, vel quanam sint figuræ simplicissimæ, quibus cum comparari possit, sive sint conicæ sectiones, sive aliæ magis complicatæ, intra horæ octantem respondere non possim. Deinde methodo directâ, & brevi, imò methodorum omnium generalium brevissimâ, eas comparare queo. Quin etiam, si duæ quævis figuræ per hujusmodi æquationes expressæ proponantur, per eandem regulam eas, modò comparari possint, comparo.*

ARTICLE SECOND.

PREPARATION pour intégrer la différentielle $y\,dx$ par les formules de l'Article precedent, en supposant que y soit une fonction algebrique de x.

CCXXXIV.

1.° On regardera $y\,dx$ comme la différentielle de l'aire d'une courbe, dont y est l'ordonnée perpendiculaire a l'abscisse x, & l'on comparera l'ordonnée y, exprimée par la fonction algebrique de x, a laquelle elle est egale, avec l'ordonnée generale $x^{\theta-1}R^{\lambda-1}(a+bx^n+cx^{2n}+\&c.)$ du Theor. III. de l'Article precedent, ou avec l'ordonnée $x^{\theta-1}R^{\lambda-1}S^{\mu-1}(a+bx^n+cx^{2n}+\&c.)$ du Theor. IV.; mais pour faire cette comparaison, il faut resoudre l'ordonnée proposée y en ses facteurs, & la reduire a la forme de l'une des deux ordonnées generales, dont nous venons de parler. Par exemple, supposé que l'ordonnée proposée soit $y = \frac{3k-lx^2}{\sqrt{kx^5-lx^7+mx^8}}$, on resoudra d'abord le denominateur en ses facteurs x^2, & $\sqrt{kx-lx^3+mx^4}$; ensuite on le fera passer au numerateur, en changeant de

+ en

$+$ en $-$ l'expoſant 2 de x^2, & l'expoſant $\frac{1}{2}$ de $(k'x - lx^3 + mx^4)^{\frac{1}{2}}$, & on ecrira l'ordonnée $y = x^{-2} \times (3k' - lx^2)(k'x - lx^3 + mx^4)^{-\frac{1}{2}}$, qui a la forme convenable pour être comparée avec l'ordonnée generale du Theor. III. $x^{\theta-1}(a + bx^n + cx^{2n} + \&c.)(e + fx^n + gx^{2n} + hx^{3n} + kx^{4n} + \&c.)^{\lambda-1}$. Car ces deux ordonnées deviendront les mêmes en faiſant $\theta - 1 = -2$, $a = 3k'$, $b = o$, $cx^{2n} = -lx^2$, ou $n = 1$, & $c = -l$, $e = o$, $f = k'$, $g = o$, $h = -l$, $m = k$, & $\lambda - 1 = -\frac{1}{2}$; en ſubſtituant ces valeurs dans la formule generale de l'aire (Art. CCVII.) $x^\theta R^\lambda \left(\frac{\frac{1}{n}a}{re} + \frac{\frac{1}{n}b - sfA}{(r+1)e}x^n + \&c.\right)$ on aura l'aire $S. ydx$ ou exactement, & en termes finis, ou par approximation, & par une ſuite infinie de termes.

CCXXXV.

2.° On peut ſouvent rendre ces comparaiſons plus ſimples, en diviſant par x, ou par une de ſes puiſſances les polynomes qui ſe trouvent dans l'ordonnée propoſée y, & en les multipliant par la même puiſſance de x, pour ne pas changer les valeurs de ces polynomes. Par exemple, ſi on a $y = x^{-2}(3k' - lx^2)(k'x - lx^3 +$

$mx^4)^{-\frac{1}{2}}$, on peut divifer, & enfuite multiplier par x le polynome $kx - lx^3 + mx^4$, & on aura $x\,(k' - lx^2 + mx^3) = k'x - lx^3 + mx^4$, & $x^{-\frac{1}{2}}(k' - lx^2 + mx^3)^{-\frac{1}{2}} = (k'x - lx^3 + mx^4)^{-\frac{1}{2}}$; par confequent $y = x^{-\frac{5}{2}}(3k' - lx^2)(k' - lx^2 + mx^3)^{-\frac{1}{2}}$, ce qui rend plus fimples les comparaifons qu'on doit faire; car dans la comparaifon avec l'ordonnée generale du Theor. III. on aura $\theta - 1 = -\frac{5}{2}$, $a = 3k'$, $b = o$, $cx^{2n} = -lx^2$, $n = 1$, $c = -l$, $e = k'$, $f = o$, $g = -l$, $b = m$, & $\lambda - 1 = -\frac{1}{2}$. Cette preparation eft fondée fur un principe evident, que le produit $X^\pi Z^r = X^\pi A . \frac{Z^r}{A} = (XA^{\frac{1}{\pi}})^\pi . (ZA^{-\frac{1}{r}})^r$, quelque foit la quantité A.

CCXXXVI.

3.° On peut toujours par ce même principe reduire l'ordonnée propofée y a deux formes, dans l'une desquelles l'expofant n foit pofitif, & negatif dans l'autre; car pour le faire paffer du pofitif au negatif, on n'a qu'a divifer d'un coté par la plus haute puiffance de x, & multiplier de l'autre coté par cette même puiffance, pour ne pas changer la valeur de l'ordonnée y, & on

fera le contraire pour faire paſſer l'expoſant n du negatif au poſitif. Par exemple, ſi on a l'ordonnée $y =$ $x^{-\frac{5}{2}}(3k - lx^2)(k - lx^2 + mx^3)^{-\frac{1}{2}}$ laquelle etant comparée avec l'ordonnée generale du Theor. III. donne l'expoſant n poſitif, & $= 1$, on n'a qu'a diviſer, & multiplier le polynome $k - lx^2 + mx^3$ par x^3 on aura $x^3(kx^{-3} - lx^{-1} + m) = k - lx^2 + mx^3$; par conſequent $x^{-\frac{3}{2}}(kx^{-3} - lx^{-1} + m)^{-\frac{1}{2}} = (k - lx^2 + mx^3)^{-\frac{1}{2}}$; faiſant la même operation ſur le polynome $3k - lx^2$, on aura $3k - lx^2 = x^2(-l + 3kx^{-2})$ & par conſequent l'ordonnée $y = x^{-\frac{5}{2}}(3k - lx^2)(k - lx^2 + mx^3)^{-\frac{1}{2}} = x^{-2}(-l + 3kx^{-2})(m - lx^{-1} + kx^{-3})^{-\frac{1}{2}}$, laquelle etant comparée avec l'ordonnée generale donne l'expoſant n negatif, ou $= -1$.

CCXXXVII.

4.° Après avoir trouvé les deux expreſſions de y; par exemple $y = x^{-\frac{5}{2}}(3k - lx^2)(k - lx^2 + mx^3)^{-\frac{1}{2}}$, & $y = x^{-2}(-l + 3kx^{-2})(m - lx^{-1} + kx^{-3})^{-\frac{1}{2}}$, dans l'une deſquelles l'expoſant n eſt po-

ſitif, & negatif dans l'autre, on comparera l'une après l'autre chacune de ces expreſſions avec l'ordonnée generale qui lui convient, & par là on determinera les valeurs des lettres de cette ordonnée generale, qu'on ſubſtituera enſuite dans la formule generale de l'aire qui repond à cette ordonnée, pour avoir l'aire cherchée $S.\ y\,dx$ exprimée par deux ſuites, dans l'une deſquelles l'expoſant n ſera poſitif, & negatif dans l'autre. Si l'une de ces deux ſuites eſt finie, c'eſt à dire, ſi, après un certain nombre de termes, tous les autres à l'infini s'evanouiſſent, on aura l'intégrale $S.\ y\,dx$ exactement, & en termes finis; mais ſi les deux ſuites ſont infinies, c'eſt une marque que la courbe ne peut être quarrée geometriquement, & alors l'une des deux ſuites ſera convergente, & donnera l'aire de la courbe, ou $S.\ y\,dx$ par approximation, excepté dans quelques cas, dont nous parlerons cy-après.

Par exemple; en comparant l'ordonnée $y = x^{-\frac{5}{2}} \times (k - lx^2)(k - lx^2 + mx^3)^{-\frac{1}{2}}$ avec l'ordonnée generale du Theor. III. $x^{\theta - 1}(a + bx^n + cx^{2n} + \&c.)(e + fx^n + gx^{2n} + \&c.)^{\lambda - 1}$, on trouve $a = 3k, b = o, c = -l, e = k, f = o, g = -l, b = m, \lambda = \frac{1}{2}, n = 1, \theta = -\frac{3}{2} = r, r + \lambda = s = -1, t = -\frac{1}{2}$, &c. & en ſubſtituant ces

valeurs dans la formule generale de l'aire du même theoreme $x^\theta R^\lambda \left(\frac{\frac{1}{n}a}{re} + \frac{\frac{1}{n}b - sfA}{(r+1)e} x^n + \&c.\right)$ on trouve que tous les termes de la suite après le premier $\frac{\frac{1}{n}a}{re}$ s'evanouissent, & que l'aire $S.\ y\,dx = -2\sqrt{\frac{k - lx^2 + mx^3}{x^3}}$.

Car $x^\theta = x^{-\frac{3}{2}}$, $R = k - lx^2 + mx^3$, $R^\lambda = (k - lx^2 + mx^3)^{\frac{1}{2}}$, $n = 1$, $\frac{\theta}{n} = r = -\frac{3}{2}$, $a = 3k$, $e = k$, $\frac{\frac{1}{n}a}{re} = \frac{3k}{-\frac{3}{2}k} = -2$, & par consequent $x^\theta R^\lambda \left(\frac{\frac{1}{n}a}{re}\right) = -2x^{-\frac{3}{2}} \times \sqrt{k - lx^2 + mx^3} = -2\sqrt{\frac{k - lx^2 + mx^3}{x^3}}$.

Il faut remarquer que l'aire negative $-2\sqrt{\frac{k - lx^2 + mx^3}{x^3}}$ est adjacente a son abscisse prolongée au dela de l'ordonnée. Car toute aire positive est adjacente a son ordonnée & a son abscisse, & l'aire negative tombe necessairement du coté opposé de l'ordonnée, & elle est adjacente a l'abscisse prolongée au dela de l'ordonnée, lorsque le signe de l'ordonnée ne change point. C'est un principe general d'Algebre, que, si une quantité quelconque qui avoit le signe + vient

a avoir le figne —, il faut la prendre du côté opposé a celui de la premiere quantité.

CCXXXVIII.

5.° Lorfque les deux fuites qui expriment l'aire cherchée $S. ydx$, & dans l'une defquelles l'expofant n eft pofitif, & negatif dans l'autre, font infinies, c'eft une marque, que la courbe ne peut être quarrée geometriquement; ou que l'intégrale $S. ydx$ ne peut fe trouver en termes finis; alors l'une de ces deux fuites fera convergente, & donnera cette intégrale par approximation, excepté dans un petit nombre de cas. Car fi $\frac{x^n}{e}$, qui fe trouve dans tous les termes de la fuite infinie, eft plus petit que l'unité, la fuite dans laquelle n eft pofitif, fera convergente, par ce que les fractions $\frac{x^n}{e^2}$, $\frac{x^{2n}}{e^3}$, $\frac{x^{3n}}{e^4}$, &c. iront toujours en diminuant, & enfin s'evanouïront. Si $\frac{x^n}{e}$ eft plus grand que l'unité, les fractions $\frac{x^{-n}}{e^2}$, $\frac{x^{-2n}}{e^3}$, $\frac{x^{-3n}}{e^4}$, &c., ou $\frac{1}{e^2x^n}$, $\frac{1}{e^3x^{2n}}$, $\frac{1}{e^4x^{3n}}$, &c. diminuent toujours & enfin s'evanouïffent, a caufe que e eft une quantité donnée, & la fuite, ou on a n negatif, fera convergente. Il faut, comme nous avons dit excepter quelques cas. 1.° Si $r=0$, le premier terme

de la ſuite $\frac{\frac{1}{n}a}{re}$ devient infini, & par conſequent l'aire $S.ydx$ eſt auſſi infinie. 2.° Si r eſt un nombre entier negatif, un des diviſeurs $(r+1)e$, $(r+2)e$, $(r+3)e$, &c. devient neceſſairement $=0$; par conſequent on aura dans la ſuite un terme infini, & l'aire $S.ydx$ ſera encore infinie. 3.° Si $\frac{x^n}{e}=1$, ou $x=e^{\frac{1}{n}}$, la ſuite ſera inutile pour trouver l'aire indeterminée $S.ydx$; puiſque x ſera une quantité conſtante. 4.° Il y a encore quelques autres cas, ou les coefficients des termes de la ſuite font qu'elle ne converge point, lorſqu'autrement elle devroit converger; par exemple, ſoit $y=\frac{1}{e+fx}=x^{1-1}.(e+fx)^{0-1}$; en comparant avec l'expreſſion generale $x^{\theta-1}(e+fx^n)^{\lambda-1}$, on a $\theta=1$, $n=1$, $\lambda=0$, $r=\frac{\theta}{n}=1$, $s=1$, & la ſuite qui exprime l'aire, devient $\frac{x}{e}(1-\frac{1}{2}.\frac{fx}{e}+\frac{1}{3}.\frac{f^2x^2}{e^2}-\frac{1}{4}.\frac{f^3x^3}{e^3}+\frac{1}{5}.\frac{f^4x^4}{e^4}$ &c. a l'infini); or on voit qu'en ſuppoſant dans cette ſuite $\frac{fx}{e}$ plus grand que l'unité, elle ne peut converger, quelque ſoit la valeur de $\frac{x}{e}$, mais dans ces cas la convergence depend de la valeur des coefficients.

CCXXXIX.

6.° Supposé que l'ordonnée proposée y soit egale au produit QT^{π} d'un facteur rationel Q & d'un autre facteur irrationel irreductible T^{π}, & que la racine rationelle T de T^{π} ne soit point un diviseur de Q, on comparera l'ordonnée y, ou QT^{π} avec l'ordonnée generale $x^{\theta-1}R^{\lambda-1}(a+bx^{n}+cx^{2n}+\&c.)$, en faisant $Q=x^{\theta-1}(a+bx^{n}+cx^{2n}+\&c.)$, $T=R=e+fx^{n}+gx^{2n}+\&c.$, T^{π}, ou $R^{\pi}=R^{\lambda-1}$, par consequent $\lambda-1=\pi$, & $\lambda=\pi+1$; mais si la racine T du facteur irrationel T^{π} divise une, ou plusieurs fois le facteur rationel Q, de sorte qu'on ait $Q=PT^{\tau}$, P etant un facteur rationel, qui n'est plus divisible par T, & l'exposant τ etant un nombre entier & positif quelconque, on aura l'ordonnée proposée $y=PT^{\pi+\tau}$, & on fera $P=x^{\theta-1}(a+bx^{n}+cx^{2n}+\&c.)$, $T^{\pi+\tau}=R^{\pi+\tau}=R^{\lambda-1}$; par consequent $\lambda-1=\pi+\tau$, & $\lambda=\pi+\tau+1$; par exemple, si l'ordonnée proposée est $y=x^{2}(2+x)(1+xx)^{-\frac{1}{3}}$, on fera $x^{2}(2+x)$ $=$

$= x^{\theta - 1}(a + bx^n + \&c.)$, $1 + xx = R = e + fx^n + gx^{2n} + \&c.$, $R^{-\frac{1}{3}} = R^{\lambda - 1}$, $\lambda - 1 = -\frac{1}{3}$, & $\lambda = \frac{2}{3}$, ce qui donnera $a = 2$, $b = 1$, $c = o$, $e = 1$, $f = o$, $g = 1$, $h = o$, $\theta = 3$, $n = 1$; valeurs qu'il faudra ſubſtituer dans la formule generale de l'aire, pour avoir l'intégrale $S. ydx$. Mais ſi $y = x^2(2 + x)(1 + xx)^2(1 + xx)^{-\frac{1}{3}}$, on fera $x^2(2 + x) = x^{\theta - 1}(a + bx^n + \&c.)$; $R = 1 + xx = e + fx^n + gx^{2n} + \&c.$; $(1 + xx)^2(1 + xx)^{-\frac{1}{3}} = (1 + xx)^{\frac{5}{3}} = R^{\frac{5}{3}} = R^{\lambda - 1}$; par conſequent $\lambda - 1 = \frac{5}{3}$, & $\lambda = \frac{8}{3}$; ce qui donnera les mêmes valeurs des lettres a, b, c, e, f, g, θ, n, & $\frac{8}{3}$ pour λ a ſubſtituer dans la formule generale de l'aire.

CCXL.

7.° Si l'ordonnée y eſt une fraction rationelle irreductible, dont le denominateur ſoit compoſé de deux, ou d'un plus grand nombre de termes, il faudra reſoudre ce denominateur en ſes diviſeurs premiers; & ſi parmi ces diviſeurs il s'en trouve quelqu'un qui n'en ait point d'autre egal, la courbe ne pourra point être quarrée geometriquement, ou l'intégrale $S. ydx$ ne ſera

point algebrique, mais elle dependra de la quadrature de l'hyperbole, ou de celle du cercle, ou de toutes les deux; car alors la fraction rationelle proposée pourra se partager en plusieurs autres fractions, dont l'une aura pour denominateur le diviseur premier qui n'a point d'egal parmi les autres diviseurs, & l'intégration de cette fraction dependra de la quadrature de l'hyperbole ou du cercle, comme nous l'avons demontré dans la theorie des fractions rationelles. On pourra neantmoins trouver cette intégrale par approximation suivant les Theoremes III., & IV. de l'Article precedent. Ce que nous venons de demontrer sert d'eclarcissement a un endroit qui a paru obscur dans le traité de la quadrature des courbes de Newton, ou ce grand Geometre s'exprime ainsi: *Si ordinata est fractio rationalis irreductibilis cum denominatore ex duobus vel pluribus terminis composito, resolvendus est denominator in divisores suos omnes primos; & si divisor sit aliquis, cui nullus alius est æqualis, curva quadrari nequit.* En effet nous venons de demontrer que dans ce cas l'intégration depend de la quadrature de l'hyperbole, ou de celle du cercle, ou de toutes les deux, & que par consequent cette courbe ne sera point quarrable absolument.

On pourroit demontrer la même chose immediatement sans avoir recours au Chapitre des fractions rationelles. Il faut pour cela se rappeller un principe d'al-

gebre. Soit une integrale $a+bx^n+cx^{2n}+ex^{3n}+$ &c. qui ne renferme qu'une variable, dont la différentielle est $nbx^{n-1}dx+2ncx^{2n-1}dx+3nex^{3n-1}dx$ &c. si les différens termes $a+bx^n+cx^{2n}+$ &c. sont multipliés respectivement par les exposans des puissances de x, & qu'on divise le produit par x, il est demontré dans les elemens d'algebre que, si la quantité qui en resulte $nbx^{n-1}+2ncx^{2n-1}+$ &c. a quelque diviseur premier commun avec la quantité proposée $a+bx^n+cx^{2n}+$ &c., ce diviseur premier sera contenu une fois de plus dans cette derniere quantité, que dans la premiere, & par consequent, si l'intégrale proposée a quelque diviseur premier commun avec la différentielle, ce diviseur sera contenu une fois de plus dans l'intégrale, que dans la différentielle. De plus on sçait par les principes du calcul différentiel, que la différentielle d'une fraction irrationelle, qui ne renferme qu'une variable ne peut jamais être rationelle, & que la différentielle d'un entier rationel ne peut jamais être une fraction.

Maintenant soit $\frac{P}{Q}$ une fraction rationelle irreductible, qui represente l'aire d'une courbe, par consequent quarrable, dont la différentielle $\frac{QdP-PdQ}{Q^2}$, & l'ordonnée une fraction rationelle. Dans l'expression différen-

tielle $\frac{QdP - PdQ}{Q^2}$, chaque diviſeur premier du denominateur Q^2 pourra le diviſer un certain nombre de fois pair, puis que c'eſt un quarré, & il diviſera Q un nombre de fois, qui ne ſera que la moitié, & la différentielle de Q, encore une fois moins que la moitié (par le principe precedent). Or ſoit ſuppoſé D ce diviſeur premier: ſi D diviſe Q^2 deux fois, il ne diviſera point du tout le numerateur; car D diviſe QdP premiere partie du numerateur, puiſqu'il diviſe Q une fois; mais il ne peut diviſer l'autre partie du numerateur, puiſqu'il ne peut diviſer dQ (par le même principe) ny P (par hyp.), P & Q etant premiers entr'eux, ny par conſequent PdQ. Donc D ne peut diviſer le numerateur $QdP - PdQ$, quand il ne diviſe que deux fois le numerateur Q^2. De même ſi D diviſe Q^2 quatre fois, il ne peut diviſer qu'une fois le numerateur $QdP - PdQ$, car il diviſe QdP deux fois, & $- PdQ$ une fois ſeulement, par la même raiſon que cy-deſſus, & par conſequent il ne peut diviſer qu'une fois le numerateur, quand il diviſe Q^2 quatre fois. On voit par le même raiſonement que, ſi un diviſeur premier diviſe un certain nombre de fois le denominateur Q^2, il diviſera le numerateur une fois moins que la moitié de ce nombre; donc, la fraction $\frac{QdP - PdQ}{Q^2}$ etant reduite a

ſes plus ſimples termes, il ne peut y avoir de diviſeur premier dans le denominateur, ſans qu'il ait ſon egal & par conſequent, ſi l'ordonneé d'une courbe eſt une fraction rationelle irreductible qui contienne quelque diviſeur premier dans le denominateur, ſans en avoir d'autre egal, la courbe ne ſera pas reductible a la forme $\frac{QdP - PdQ}{Q^2}$, & par conſequent ne ſera pas quarrable.

CCXLI.

8.° Si parmi les diviſeurs premiers de la fraction rationelle irreductible, qui eſt egale a l'ordonnée y, on en trouve deux, ou pluſieurs egaux entr'eux, il faudra rejetter un d'eux; & s'il en reſte encore deux, ou pluſieurs egaux entr'eux, mais différens des autres, on en rejettera encore un d'eux, & on fera la même choſe a l'egard de tous les autres diviſeurs egaux, qui pourront reſter, c'eſt a dire, qu'on en rejettera un de chaque eſpece. Enſuite on mettra pour R dans l'ordonnée generale le diviſeur premier qui reſtera, ou le produit de tous les diviſeurs premiers qui reſteront aprés cette operation, & on ecrira R^{-2} pour $R^{\lambda - 1}$, ce qui donnera $\lambda = -1$. Il faut excepter le Cas, ou le produit des diviſeurs reſtans eſt un quarré, ou un cube, ou generalement une puiſſance quelconque, dont l'expoſant eſt un nombre entier, & poſitif, plus grand que l'uni-

té, que nous designerons par σ; car dans ce cas il faudra mettre la racine de cette puissance pour R, & l'exposant de la même puissance pris negativement pour λ, ou faire $\lambda = -\sigma$, & reduire la fraction rationelle, qui est egale a l'ordonnée y, au denominateur $R^{\sigma+1}$.

Pour bien faire comprendre la raison de ces preparations, que prescrit M.r Newton, supposons que l'ordonnée y soit $\frac{P}{Q^{\pi} T^{\tau} X^{\nu}}$, fonction rationelle irreductible, dont le denominateur ait pour ses diviseurs premiers Q, Q, Q, &c., T, T, T, &c., X, X, X, &c., on rejettera un de chaque espece de ses diviseurs egaux, c'est a dire, un Q, un T, un X, & on mettra pour R le produit $Q^{\pi-1} T^{\tau-1} X^{\nu-1}$, de tous les autres diviseurs qui restent; par consequent on aura $Q^{2\pi-2} T^{2\tau-2} X^{2\nu-2} = R^2$. Ensuite on reduira la fraction $\frac{P}{Q^{\pi} T^{\tau} X^{\nu}}$ au denominateur R^2, ou $Q^{2\pi-2} \times T^{2\tau-2} X^{2\nu-2}$; en supposant que le numerateur de cette fraction ainsi reduite soit N, on aura

$\frac{N}{Q^{2\pi-2} T^{2\tau-2} X^{2\nu-2}} = \frac{P}{Q^{\pi} T^{\tau} X^{\nu}}$; par consequent $N = P Q^{\pi-2} T^{\tau-2} X^{\nu-2}$, & l'ordonnée y sera exprimée par la fraction $\frac{P Q^{\pi-2} T^{\tau-2} X^{\nu-2}}{Q^{2\pi-2} T^{2\tau-2} X^{2\nu-2}}$. On mettra donc

dans l'ordonnée generale $x^{\theta-1} R^{\lambda-1} (a+bx^n+cx^{2n}$ $+ \&c.)$ le numerateur $P Q^{\pi-2} T^{\tau-2} X^{\nu-2}$ pour $x^{-1} (a+bx^n+cx^{2n}+\&c.)$, la racine quarrée du denominateur, ou $Q^{\pi-1} T^{\tau-1} X^{\nu-1}$ pour R, ou pour $e+fx^n+gx^{2n}+\&c.$, & R^{-2} pour $R^{\lambda-1}$, ce qui donnera $R=-1$.

Pour rendre raison du Cas excepté, soit l'ordonnée $y=\frac{P}{Q^{\sigma\pi+1} T^{\sigma\tau+1} X^{\sigma\nu+1}}$, σ etant un nombre entier positif plus grand que l'unité, & Q, T, X des diviseurs premiers, & inegaux, en rejettant un de ces diviseurs egaux de chaque espece, on aura $y=$ $\frac{P}{QTX(Q^{\sigma\pi} T^{\sigma\tau} X^{\sigma\nu})}=\frac{P}{QTX(Q^{\pi} T^{\tau} X^{\nu})^{\sigma}}$, & le produit des diviseurs restans sera la puissance $(Q^{\pi} T^{\tau} X^{\nu})^{\sigma}$. On sera donc sa racine $Q^{\pi} T^{\tau} X^{\nu}=Z$, & on aura $y=$ $\frac{P}{QTX.Z^{\sigma}}$. Maintenant, pour trouver le numerateur N d'une autre fraction egale a $\frac{P}{QTX.Z^{\sigma}}$, & propre a être comparée avec l'ordonnée generale $x^{\theta-1} R^{\lambda-1} \times$ $(a+bx^n+cx^{2n}+\&c.)$, qu'on suppose $\frac{N}{Z^{\sigma+1}}=\frac{P}{QTX.Z^{\sigma}}$, & on aura $N=\frac{PZ}{QTX}=\frac{PQ^{\pi} T^{\tau} X^{\nu}}{QTX}=PQ^{\pi-1} T^{\tau-1} \times$

$X^{\upsilon-1}$; donc, en ſuppoſant encore Z, ou $Q^{\pi} T^{\tau} X^{\upsilon} = R = e + f x^{n} + g x^{2n} + \&c.$, on aura $Z^{\sigma+1} = R^{\sigma+1}$; par conſequent on pourra comparer la fraction propoſée, ou l'ordonnée y avec l'ordonnée generale, en faiſant $P Q^{\pi-1} T^{\tau-1} X^{\upsilon-1} = x^{\theta-1} (a + b x^{n} + c x^{2n} + \&c.)$, $Q^{\pi} T^{\tau} X^{\upsilon} = Z = R = e + f x^{n} + g x^{2n} + \&c.$, & $Z^{-\sigma-1} = R^{-\sigma-1} = R^{\lambda-1}$, ce qui donne $\lambda = -\sigma$; comme on l'avoit dit.

EXEMPLE pris des quadratures de Newton. Soit l'ordonnée $y = \frac{x^{5} + x^{4} - 8x^{3}}{x^{5} + x^{4} - 5x^{3} - x^{2} + 8x - 4}$ par ce que cette fraction eſt irreductible, & que le denominateur a ſes diviſeurs premiers egaux $x-1$, $x-1$, & $x+2$, $x+2$, on en rejette un de chaque eſpece, ſçavoir, $x-1$, & $x+2$, on met pour R le produit $x^{3} - 3x + 2$ des diviſeurs reſtans $x-1$, $x+2$, & on fait $R^{-2} = R^{\lambda-1}$, ou $\lambda = -1$. Enſuite on reduit la fraction, ou l'ordonnée propoſée au denominateur R^{2}, & comme cette fraction $\frac{x^{5} + x^{4} - 8x^{3}}{(x-1)(x+2)(x^{3} - 3x + 2)}$ eſt $= \frac{x^{5} + x^{4} - 8x^{3}}{(x-1)(x+2)R}$, on la reduit au denominateur R^{2} en multipliant le numerateur, & le denominateur par R, ce qui la change

en

en $\frac{(x^5+x^4-8x^3)(x^3-3x+2)}{(x-1)(x+2)R^2} =$

$\frac{(x^5+x^4-8x^3)(x-1)(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+2)R^2} = \frac{(x^5+x^4-8x^3)(x-1)}{R^2}$

$= \frac{x^3(8-9x+x^3)}{(x^3-3x+2)^2} = x^3(8-9x+x^3)(x^3-3x+2)^{-2}$, & en comparant cette ordonnée avec l'ordonnée generale $x^{\theta-1}R^{\lambda-1}(a+bx^n+cx^{2n}+\&c.)$, on aura $x^3(8-9x+x^3)=x^{\theta-1}(a+bx^n+cx^{2n}+dx^{3n}+\&c.)$; & comme nous avons deja trouvé $x^3-3x+2=R=e+fx^n+gx^{2n}+hx^{3n}+\&c.$, on a $\theta-1=3$, $n=1$, $\lambda-1=-2$, $a=8$, $b=-9$, $c=0$, $d=1$, $e=2$, $f=-3$, $g=0$, $h=1$, $\lambda=-1$, $\theta=4=r$, $s=3$, $t=2$, $u=1$; & ayant ecrit ces valeurs dans la formule generale de l'aire $x^\theta R^\lambda\left(\frac{\frac{1}{n}a}{re}+\frac{\frac{1}{n}b-sfA}{(r+1)e}x^n+\&c.\right)$, on aura l'aire cherchée $=\frac{x^4}{x^3-3x+2}$, tous les termes de la suite s'evanouïssant aprés le premier.

EXEMPLE pour le Cas excepté. Soit l'ordonneé $y = \frac{1+2x}{1-3x^2+3x^4-x^6}$, fraction dont le denominateur a pour diviseurs premiers $1-x$, $1-x$, $1-x$, $1+x$, $1+x$, $1+x$, ayant rejetté un de chaque espece de ces diviseurs egaux, c'est a dire, $1-x$, $1+x$, le produit de

ceux qui reſtent ſera $(1-x)(1-x)(1+x)(1+x) = (1-xx)^2$, on ſuppoſera donc $1-xx=R$, $\lambda=-2$, & $R^{\lambda-1}=R^{-3}$, & la fraction propoſée ſera $\frac{1+2x}{(1-x)(1+x)(1-xx)^2}=\frac{1+2x}{(1-xx)^3}$, qui eſt deja reduite au denominateur R^3; on la compare donc avec l'ordonnée generale $x^{\theta-1}R^{\lambda-1}(a+bx^n+cx^{2n}+\&c.)$, en faiſant $1+2x$, ou $x^0(1+2x)=x^{\theta-1}(a+bx^n+cx^{2n}+\&c.)$, & $1-xx=R=e+fx^n+gx^{2n}+\&c.$; d'ou l'on tirera les valeurs ſuivantes $\theta-1=0$, $\theta=1$, $a=1$, $b=2$, $c=0$, $n=1$, $e=1$, $f=0$, $g=-1$, $h=0$, $\frac{\theta}{n}=r=1$, $s=r+\lambda=1-2=-1$, $t=s+\lambda=-3$, $u=t+\lambda=-5$, &c., qu'on ſubſtituera dans la formule generale de l'aire $x^{\theta}R^{\lambda}\left(\frac{\frac{1}{n}a}{re}+\frac{\frac{1}{n}b-sfA}{(r+1)e}x^n+\&c.\right)$ pour avoir l'aire cherchée $S.ydx$.

CCXLII.

9.° Enfin ſi l'ordonnée y eſt une fraction irreductible $\frac{P}{Q.T^{\tau}}$, dont le denominateur $Q.T^{\tau}$ ſoit le produit d'un facteur rationel Q, & d'un facteur irrationel T^{τ}, il faudra trouver tous les diviſeurs premiers de la racine T du facteur T^{τ}, en rejetter un de chaque eſpece, &

multiplier ensuite le facteur rationel Q par les diviseurs restans, s'il en reste, & si ce produit est egal a la racine T, ou a sa puissance T^σ, dont l'exposant σ soit un nombre entier, on fera $T = R = e + fx^n + gx^{2n} + \&c.$, & $\lambda - 1 = -\tau - \sigma$, par consequent $R^{\lambda-1} = R^{-\tau-\sigma}$, & on reduira la fraction proposée $\frac{p}{Q.T^\tau}$ au denominateur $R^{\tau+\sigma}$, pour la comparer ensuite avec l'ordonnée generale $x^{\theta-1}R^{\lambda-1}(a + bx^n + cx^{2n} + \&c.)$. Car supposant $T = X^\tau Z^\nu$, & que les diviseurs premiers soient X, X, X, &c., Z, Z, Z, &c., aprés avoir rejetté un diviseur de chaque espece, ou un X, & un Z, on multipliera le facteur Q par le produit $X^{\tau-1} Z^{\nu-1}$ des diviseurs restans, pour avoir le produit $Q.X^{\tau-1} Z^{\nu-1} = T^\sigma$. Si on fait $T = R = e + fx^n + gx^{2n} + \&c.$, & $\lambda - 1 = -\tau - \sigma$, par consequent $R^{\lambda-1} = R^{-\tau-\sigma}$, l'ordonnée y, ou la fraction $\frac{p}{Q.T^\tau}$ sera $\frac{p}{Q.R^\tau}$.

Maintenant pour reduire cette fraction au denominateur $R^{\tau+\sigma}$, supposons que le numerateur de la fraction reduite soit N, de sorte que $\frac{N}{R^{\tau+\sigma}} = \frac{p}{Q.R^\tau}$, on aura $N = \frac{P.R^\sigma}{Q}$; & puisque $Q.X^{\tau-1} Z^{\nu-1} = T^\sigma = R^\sigma$ (par la supposition), on aura $Q = \frac{R^\sigma}{X^{\tau-1}Z^{\nu-1}}$;

par consequent $N = P.X^{\tau-1}Z^{\nu-1}$, & la fraction ou l'ordonnée proposée $\frac{P}{Q.T^{\sigma}} = \frac{P.X^{\tau-1}Z^{\nu-1}}{R^{\sigma+\tau}} = P.X^{\tau-1} \times Z^{\nu-1}.R^{-\tau-\sigma}$, qu'on comparera avec l'ordonnée generale $x^{\theta-1}R^{\lambda-1}(a+bx^{n}+cx^{2n}+\&c.)$, en faisant $P.X^{\tau-1}Z^{\nu-1} = x^{\theta-1}(a+bx^{n}+cx^{2n}+\&c.)$, $R = e+fx^{n}+gx^{2n}+\&c.$ & $\lambda-1 = -\tau-\sigma$, ou $\lambda = 1-\tau-\sigma$.

EXEMPLE. Soit l'ordonnée $y = \frac{3q^{5}-q^{4}x+9q^{3}xx-qqx^{3}-6qx^{4}}{(qq-xx)(q^{3}+qqx-qxx-x^{3})^{\frac{1}{3}}}$, dans laquelle le facteur rationel Q sera $qq-xx$, & le facteur irrationel T^{τ} sera $(q^{3}+qqx-qxx-x^{3})^{\frac{1}{3}}$; par consequent $T = q^{3}+qqx-qxx-x^{3}$, & l'exposant $\tau = \frac{1}{3}$, les diviseurs premiers de T sont $q+x$, $q+x$, $q-x$, dont on rejettera les deux $q+x$, & $q-x$, & on multipliera par le diviseur restant $q+x$ le facteur rationel $qq-xx$; on aura pour produit $q^{3}+qqx-qxx-x^{3}$, qui est egal a la racine T du facteur irrationel T^{σ}; par consequent l'exposant $\sigma = 1$; on fera donc $q^{3}+qqx-qxx-x^{3} = R = e+fx^{n}+gx^{2n}+$

&c., $\lambda - 1 = -\tau - \sigma = -\frac{1}{3} - 1 = -\frac{4}{3}$, & $\lambda = -\frac{1}{3}$, ensuite on reduira la fraction proposée y au denominateur $R^{\frac{4}{3}}$, en multipliant son numerateur, & son denominateur par le diviseur restant $q + x$, ce qui ne change point la valeur de la fraction, & rend son denominateur egal a $R^{\frac{4}{3}}$, ou $(q^3 + qqx - qxx - x^3)^{\frac{4}{3}}$; par cette reduction l'ordonnée y sera exprimée par la fraction $x^0(3q^6 + 2q^5x + 8q^4xx + 8q^3x^3 - 7qqx^4 - 6qx^5)(q^3 + qqx - qx^2 - x^3)^{-\frac{4}{3}}$, qu'on comparera avec l'ordonnée generale $x^{\theta - 1}R^{\lambda - 1}(a + bx^n + cx^{2n} + \&c.)$, en faisant $x^0(3q^6 + 2q^5x + 8q^4xx + 8q^3x^3 - 7qqx^4 - 6qx^5) = x^{\theta - 1}(a + bx^n + cx^{2n} + \&c.)$; $q^3 + 9qx - qxx - x^3 = e + fx^n + gx^{2n} + \&c. = R$, & $\lambda - 1 = -\frac{4}{3}$, ou $\lambda = -\frac{1}{3}$; d'où l'on tire $a = 3q^6$, $b = 2q^5$, &c., $e = q^3$, $f = qq$, &c., $\theta - 1 = 0$, ou $\theta = 1 = n$, $\lambda = -\frac{1}{3}$, $r = 1$, $s = \frac{2}{3}$, $t = \frac{1}{3}$, $u = 0$, & ayant substitué ces valeurs dans la formule generale de l'aire $x^\theta R^\lambda\left(\frac{\frac{1}{n}a}{re} + \frac{\frac{1}{n}b - sfA}{(r+1)e}x^n + \&c.\right)$, on trouvera

l'aire cherchée $S.\, y\, dx = \frac{3qqx + 3x^3}{\sqrt[3]{q^3 + qqx - qxx - x^3}}$, par ce que tous les termes s'evanouïſſent après le troiſieme.

CCXLIII.

10.° Si l'ordonnée $y = P.\, Q^{\frac{\pi}{\varepsilon}} .\, T^{\frac{\tau}{\upsilon}}$, produit de trois facteurs; dont le premier P ſoit rationel, & les deux autres $Q^{\frac{\pi}{\varepsilon}}$, & $T^{\frac{\tau}{\upsilon}}$ irrationels, & irreductibles, on pourra la comparer avec l'ordonnée generale du Theoreme IV. $x^{\theta - 1} R^{\lambda - 1} S^{\mu - 1} (a + bx^n + cx^{2n} + \&c.)$ en ſuppoſant $P = x^{\theta - 1} (a + bx^n + cx^{2n} + \&c.)$; $Q = R = e + fx^n + gx^{2n} + \&c.$; $\lambda - 1 = \frac{\pi}{\varepsilon}$, $T = S = k + lx^n + mx^{2n} + \&c.$, & $\mu - 1 = \frac{\tau}{\upsilon}$, d'où l'on tire les valeurs des lettres de la formule generale de l'aire $x^\theta R^\lambda S^\mu \left(\frac{\frac{1}{n}a}{rek} + \&c.\right)$. Mais il ſera quelque fois plus ſimple, & plus commode de comparer l'ordonnée propoſée avec l'ordonnée generale du Theoreme III., ce qu'on peut toujours faire en reduiſant le produit $Q^{\frac{\pi}{\varepsilon}} T^{\frac{\tau}{\upsilon}}$ des deux facteurs irrationels a la forme $(Q^{\pi\upsilon} T^{\tau\varepsilon})^{\frac{1}{\varepsilon\upsilon}}$, & en ſuppoſant enſuite $P = x^{\theta - 1} (a +$

$b x^n + c x^{2n} + \&c.$); $Q^{\pi\nu} T^{\tau\sigma} = R$, & $\lambda - 1 = \frac{1}{\sigma\nu}$. Si les denominateurs σ, & ν des exposants $\frac{\pi}{\sigma}$, & $\frac{\tau}{\nu}$ sont les mêmes, on aura $Q^{\frac{\pi}{\sigma}} T^{\frac{\tau}{\sigma}} = (Q^{\pi} T^{\tau})^{\frac{1}{\sigma}}$, on suppofera $Q^{\pi} T^{\tau} = R$, & $\lambda - 1 = \frac{1}{\sigma}$. Par exemple, si l'ordonnée $y = (1 + 2x)(1 + x)^{\frac{1}{2}}(1 - x)^{\frac{1}{2}}$, on pourra suppofer $x^0 (1 + 2x) = x^{\theta - 1}(a + b x^n + \&c.)$, $1 + x = R$, $\lambda - 1 = \frac{1}{2}$, $1 - x = S$, & $\mu - 1 = \frac{1}{2}$; on se servira de la formule du Theoreme III. en faisant $1 - xx = R$, & $\lambda - 1 = \frac{1}{2}$; car $(1 - xx)^{\frac{1}{2}} = (1 + x)^{\frac{1}{2}}(1 - x)^{\frac{1}{2}}$.

Si dans le produit $P . Q^{\frac{\pi}{\sigma}} . T^{\frac{\tau}{\nu}} = y$, le facteur rationel P est divisible par l'une, ou par l'autre des racines Q, & T, ou par toutes les deux; par exemple, si $P = X Q^p T^q$, ou si $y = X . Q^{p - \frac{\pi}{\sigma}} . T^{q + \frac{\tau}{\nu}}$, on pourra suppofer $X = x^{\theta - 1}(a + b x^n + c x^{2n} + \&c.)$ $Q = R$, $p + \frac{\pi}{\sigma} = \lambda - 1$, $T = S$, & $q + \frac{\tau}{\nu} = \mu - 1$, ou, en reduisant les exposans $p + \frac{\pi}{\sigma}$, & $q + \frac{\tau}{\nu}$ au mê-

me denominateur $\sigma\nu$, ſe ſervir de la formule du Theoreme III.

Si l'ordonnée $y = \frac{P}{Q\,T^{\frac{\tau}{\nu}}\,X^{\frac{\pi}{\sigma}}}$, fraction irreductible, dont le numerateur P ſoit rationel, & le denominateur ſoit le produit du facteur rationel Q, & de deux autres facteurs irrationels & irreductibles, il faudra trouver tous les diviſeurs premiers des racines T & X, & en rejetter un de chaque eſpece; enſuite on multipliera ſucceſſivement le facteur rationel Q par tous les autres diviſeurs premiers reſtants de T, puis par tous les autres diviſeurs premiers reſtans de X, enfin par tous les autres diviſeurs reſtans de T & de X; & ſi un de ces produits que nous appellerons Z eſt egal a T^p, ou a X^q, ou a $T^p X^q$, les expoſans p & q etant des nombres entiers, on multipliera encore le numerateur P de la fraction y par Z, & on ecrira dans ſon denominateur T^p, ou X^q, ou $T^p X^q$, au lieu du produit QZ, ce qui ne changera point la valeur de la fraction y, & donnera a ſon denominateur la forme de $T^{\frac{\tau}{\nu}+p} \times X^{\frac{\pi}{\sigma}}$, ou de $T^{\frac{\tau}{\nu}} X^{\frac{\pi}{\sigma}+q}$, ou de $T^{\frac{\tau}{\nu}+p} X^{\frac{\pi}{\sigma}+q}$ alors on ſuppoſera $PZ = x^{\theta-1}(a + bx^n + cx^{2n} + \&c.)$, $T = R$, $X = S$

$X=S$, l'expoſant de T dans le denominateur, c'eſt a dire, $\frac{\pi}{\nu}+p$, ou $\frac{\pi}{\nu}=\lambda-1$, & l'expoſant de X, c'eſt a dire, $\frac{\pi}{\sigma}$, ou $\frac{\pi}{\sigma}+q=\mu-1$.

ARTICLE TROISIEME.

Application de la Theorie precedente.

CCXLIV.

LEMME. Si ydx eſt la différentielle de l'aire d'une courbe, dont l'abſciſſe ſoit x, & l'ordonnée $y=x^{\tau}(a+bx^{\sigma}+cx^{2\sigma}+\&c.)^{\pi}$, on pourra toujours l'intégrer algebriquement, ou par la quadrature de l'hyperbole, lorſque l'expoſant π ſera un nombre entier poſitif. Car on n'aura pour cela qu'a developper la puiſſance, dont l'expoſant eſt π, multiplier enſuite chaque terme de cette puiſſance par $x^{\tau}dx$, & intégrer chacun de ces termes ſeparément; ce qu'on pourra toujours faire abſolument, ou par les logarithmes. Mais lorſque π ſera un nombre rompû, ou un nombre entier negatif, on cherchera l'intégrale $S.ydx$, en comparant l'ordonnée y avec l'ordonnée generale du Theoreme III. reduite a la forme $x^{\theta-1}(e+fx^{n}+gx^{2n}+hx^{3n}+\&c.)^{\lambda-1}$, &

on aura $S.\,y\,dx = x^\theta (e + fx^n + gx^{2n} + \&c.)^\lambda \Big(\frac{\frac{1}{n}}{re} - \frac{sfA}{\overline{r+1}.e}x^n - \Big(\frac{(s+1)fB + tgA}{\overline{r+2}.e}\Big)x^{2n} - \Big(\frac{(s+2)fC + (t+1)gB + uhA}{\overline{r+3}.e}\Big)x^{3n} - \&c.\Big)$ (Art. CCVIII.).

CCXLV.

PROBLEME I. Trouver l'intégrale de la différentielle binome $x^\tau dx (a + bx^\sigma)^\pi$, ou la reduire a la quadrature de la courbe la plus ſimple.

SOLUTION I.° On a dans cette différentielle l'ordonnée $y = x^\tau (a + bx^\sigma)^\pi = x^{\tau + \sigma\pi} (b + ax^{-\sigma})^\pi$; on la comparera ſous ces deux formes avec l'ordonnée $x^{\theta - 1} (e + fx^n)^{\lambda - 1}$ en faiſant $g = o = h$, &c. dans l'ordonnée generale, & on aura l'aire $S.\,y\,dx = x^\theta (e + fx^n)^\lambda \Big(\frac{\frac{1}{n}}{re} - \frac{sfA}{\overline{r+1}.e}x^n - \frac{(s+1)fB}{\overline{r+2}.e}x^{2n} - \frac{(s+2)fC}{\overline{r+3}.e}x^{3n} - \&c.\Big)$ (Art. CCX.). Dans cette ſuite $r = \frac{\theta}{n}$, $s = r + \lambda$, $A = \frac{\frac{1}{n}}{re}$, $B = -\frac{sfA}{\overline{r+1}.e}$, $C = -\frac{(s+1)fB}{\overline{r+2}.e}$, $D = -\frac{(s+2)fC}{\overline{r+3}.e}$, &c., & en ſubſtituant ces valeurs de A,

B, C, D, &c., on trouve $S.\,y\,dx = x^{\theta}(e+fx^{n})^{\lambda} \times$

$$\left(\frac{\frac{1}{n}}{re} - \frac{\frac{1}{n}\cdot sf}{r.\overline{r+1}.e^{2}}x^{n} + \frac{\frac{1}{n}(s.\overline{s+1}).f^{2}}{r.\overline{r+1}.\overline{r+2}.e^{3}}x^{2n} - \&c.\right) =$$

$$\frac{1}{n}x^{\theta}(e+fx^{n})^{\lambda}\left(\frac{1}{re} - \frac{sf}{r.\overline{r+1}.e^{2}}x^{n} + \frac{s.\overline{s+1}.f^{2}}{r.\overline{r+1}.\overline{r+2}.e^{3}}x^{2n}\right.$$

$$\left. - \frac{s.\overline{s+1}.\overline{s+2}.f^{3}}{r.\overline{r+1}.\overline{r+2}.\overline{r+3}.e^{4}}x^{3n} + \&c.\right);$$ d'ou l'on voit que cette ſuite finira après le premier terme, lorſque $s=o$, qu'elle finira après le ſecond terme, lorſque $s=-1$, après le troiſieme, lorſque $s=-2$, après le quatrieme, lorſque $s=-3$, &c., & que dans tous ces Cas l'aire $S.\,y\,dx$ ſe trouvera en termes finis. Il faut cependant excepter le Cas, dans lequel s etant egal a -2, -3, &c., r feroit egal a -1, -2, -1, o, & en general toutes les fois que r ſera $=o$, ou un nombre entier negatif pas plus grand que s; car alors il eſt clair que la ſuite renferme neceſſairement quelque denominateur, qui devient zero, & que par conſequent la ſuite devient infinie.

II.° En comparant l'ordonnée y ſous la forme $x^{\tau}(a+bx^{\sigma})^{\pi}$ avec l'ordonnée $x^{\theta-1}(e+fx^{n})^{\lambda-1}$, on trouve $e=a$, $f=b$, $\theta-1=\tau$, $\theta=\tau+1$, $\lambda-1=\pi$, $\lambda=\pi+1$, $n=\sigma$, $r=\frac{\theta}{n}=\frac{\tau+1}{\sigma}$, $s=r+\lambda=r+\pi+1=\frac{\tau+1}{\sigma}+\pi+1$, & l'aire $S.\,y\,dx=\frac{1}{\sigma}x^{\tau+1}\times$

$(a+bx^{\sigma})^{\pi+1}\left(\frac{1}{ra} - \frac{sb}{r.\overline{r+1}.a^2}x^{\sigma} + \frac{s.\overline{s+1}.b^2}{r.\overline{r+1}.\overline{r+2}.a^3}x^{2\sigma} - \frac{s.\overline{s+1}.\overline{s+2}.b^3}{r.\overline{r+1}.\overline{r+2}.\overline{r+3}.a^4}x^{3\sigma} + \&c.\right)$. Cette aire sera algebrique, ou exprimée en termes finis, lorsque $\frac{\tau+1}{\sigma}+\pi+1$ sera un nombre entier negatif ou zero.

III.° En comparant l'ordonnée y sous la forme $x^{\tau+\sigma\pi}(b+ax^{-\sigma})^{\pi}$ avec l'ordonnée $x^{\theta-1}(e+fx^{n})^{\lambda-1}$, on trouve $e=b$, $f=a$, $\theta-1=\tau+\sigma\pi$, $\theta=\tau+\sigma\pi+1$, $\lambda=\pi+1$, $n=-\sigma$, $r=\frac{\theta}{n}=-\left(\frac{\tau+\sigma\pi+1}{\sigma}\right)$, $s=r+\pi+1=\frac{\sigma-\tau-1}{\sigma}$, & l'aire $S.y\,dx=-\frac{1}{\sigma}\times$ $x^{\tau+\sigma\pi+1}(b+ax^{-\sigma})^{\pi+1}\left(\frac{1}{rb} - \frac{sa}{r.\overline{r+1}.b^2.x^{\sigma}} + \frac{s.\overline{s+1}.a^2}{r.\overline{r+1}.\overline{r+2}.b^3.x^{2\sigma}} - \frac{s.\overline{s+1}.\overline{s+2}.a^3}{r.\overline{r+1}.\overline{r+2}.\overline{r+3}.b^4.x^{3\sigma}} - \&c.\right)$; cette aire sera algebrique lorsque $\frac{\sigma-\tau-1}{\sigma}$ sera un nombre entier negatif, ou zero, & il faut remarquer qu'on peut mettre dans son expression $x^{\tau+1-\sigma}(a+bx^{\sigma})^{\pi+1}$ au lieu de $x^{\tau+\sigma\pi+1}(b+ax^{-\sigma})^{\pi+1}$, ces deux quantités etant egales entr'elles.

IV.° Si les suites des aires sont toutes les deux infinies, il faudra reduire la différentielle proposée a cel-

le de la courbe la plus ſimple. On changera pour cela l'ordonnée $x^\tau (a+bx^\sigma)^\pi$ en celle d'une autre courbe d'aire egale, en ſuppoſant (Art. CCXXI.) $x^\sigma = z^\nu$, & on aura la nouvelle ordonnée $\frac{\nu}{\sigma} z^{\frac{\nu\tau+\nu-\sigma}{\sigma}} (a+bz^\nu)^\pi$, & $\frac{1}{\sigma} z^{\frac{\tau+1-\sigma}{\sigma}} (a+bz)^\pi$, lorſqu'on ſuppoſera $\nu = 1$, on rejettera enſuite des expoſans $\frac{\tau+1-\sigma}{\sigma}$, & π autant de fois $+1$, ou -1, qu'il ſera neceſſaire pour rendre la nouvelle courbe la plus ſimple qu'il eſt poſſible de trouver par ce moyen. Enfin on eſſayera, ſi cette courbe ne peut pas encore devenir plus ſimple, en ſuppoſant $z = \frac{1}{u}$ (Art. CCXXIV.), ce qui donnera $\frac{1}{\sigma} z^{\frac{\tau+1-\sigma}{\sigma}} dz \times (a+bz)^\pi = - \frac{1}{u^{\frac{\tau+1+\sigma+\sigma\pi}{\sigma}}} du (b+au)^\pi$. Lorſqu'on aura trouvé la courbe la plus ſimple, on remontera de ſon aire regardée comme donnée a l'aire de la courbe, dont l'ordonnée eſt $x^\tau (a+bx^\sigma)^\pi$. Nous eclaircirons les différens Cas de ce Probleme par des exemples.

EXEMPLE I. Soit l'ordonnée propoſée $y = x^{\sigma-1} \times (a+bx^\sigma)^{-2}$; en la comparant avec l'ordonnée $x^\tau (a+bx^\sigma)^\pi$, on trouve $\tau = \sigma - 1$, $\pi = -2$, $r = \frac{\tau+1}{\sigma} = 1$, $s = r + \pi + 1 = o$, & l'aire $S. y dx = \frac{1}{\sigma} x^\sigma (a+$

$bx^{\sigma})^{-1}\left(\frac{1}{\sigma a}\right) = \frac{x^{\sigma}}{\sigma aa + \sigma abx^{\sigma}}$, tous les termes de la ſuite de l'aire s'evanouïſſant aprés le premier.

Si on reduit l'ordonnée propoſée a la ſeconde forme $x^{\tau+\sigma\pi}(b + ax^{-\sigma})^{\pi}$, on aura $r = \frac{\tau+\sigma\pi+1}{-\sigma} = \frac{\sigma-1-2\sigma+1}{-\sigma} = 1, s = r + \pi + 1 = 1 - 2 + 1 = 0$, & l'aire $S.y\,dx = -\frac{1}{\sigma}x^{\tau+1-\sigma}(a + bx^{\sigma})^{\pi+1} = -\frac{1}{\sigma}x^{0} \times (a + bx^{\sigma})^{-1}.\frac{1}{b} = -\frac{1}{\sigma ab + bbx^{\sigma}}$; tous les termes s'evanouïſſant aprés le premier, comme dans la forme precedente. Cet exemple eſt pris de la premiere Table de Newton, forme deuxieme, dans le traité des quadratures.

L'equation $c^4y - a^4x - 2c^2yx^2 + yx^4 = 0$, qui exprime le rapport de l'ordonnée y, & de l'abſciſſe x, qui pourroit paroître très compliquée, n'eſt qu'un cas très ſimple du precedent; car cette equation donne $y = \frac{a^4x}{c^4 - 2c^2x^2 + x^4}$, qui ſe reduit a celle-cy $\frac{a^4x}{(c^2 - x^2)^2}$ a cauſe du quarré $c^4 - 2c^2x^2 + x^4$, dont la racine eſt $c^2 - x^2$. Or comparant avec la forme $x^{\sigma-1}(a + bx^{\sigma})^{-2}$, on trouve $\sigma - 1 = 1$, ou $\sigma = 2$, $a = c^2, b = -1$, & en ſubſtituant ces valeurs dans l'expreſſion de l'aire

$\frac{x^7}{\sigma aa + \tau abx^\sigma}$, & en multipliant par a^4, on aura l'aire cherchée $= \frac{a^4 x^3}{2c^3 - 2ccx^2}$. On trouveroit l'aire dans la seconde forme $= \frac{a^4}{2c^3 - 2x^2}$. Ces courbes qu'on peut quarrer sous les deux formes sont celles, qu'on appelle *doublement quarrables*.

EXEMPLE II. Soit $y = x^{2\sigma - 1}(a + bx^\sigma)^{\frac{1}{2}}$, en comparant cette ordonnée avec $x^\tau(a + bx^\sigma)^\pi$, on trouve $\tau = 2\sigma - 1$, $\pi = \frac{1}{2}$, $r = \frac{\tau + 1}{\sigma} = 2$, $s = r + \pi + 1 = \frac{7}{2}$; & ces valeurs etant substituées dans la formule de l'aire donnent une suite infinie; il faut donc tenter l'autre comparaison, par laquelle on trouve $r = \frac{\tau + \tau\pi + 1}{-\sigma} = -\frac{5}{2}$, $s = r + \pi + 1 = -1$, & l'aire $S.ydx = -\frac{1}{\sigma} x^{\tau + 1 - \sigma}(a + bx^\sigma)^{\pi + 1}\left(\frac{1}{rb} - \frac{sa}{r.\overline{r+1}.bb.x^\sigma}\right)$ $= -\frac{1}{\sigma} x^\sigma (a + bx^\sigma)^{\frac{3}{2}}\left(-\frac{2}{5b} + \frac{a}{\frac{15}{4}bbx^\sigma}\right) = (a + bx^\sigma)^{\frac{3}{2}} \times \left(\frac{6bx^\sigma - 4a}{15\sigma bb}\right)$.

EXEMPLE III. Soit $y = x^{3\sigma - 1}(a + bx^\sigma)^{-1}$, en

comparant cette ordonnée avec $x^{\tau}(a+bx^{\sigma})^{\pi}$, on trouve $\tau = 3\sigma - 1$, $\pi = -1$, $r = \frac{\tau+1}{\sigma} = 3$, $s = r + \pi + 1 = r = 3$, & l'aire $S.ydx = \frac{1}{\sigma}x^{3\sigma}(a+bx^{\sigma})^{0}(\frac{1}{3}a - \frac{bx^{\sigma}}{4a^{2}} + \frac{b^{2}x^{2\sigma}}{5a^{3}} - \frac{b^{3}x^{3\sigma}}{6a^{4}} +$ &c. a l'infini). Il faut donc tenter l'autre comparaifon, qui donne $r = \frac{\tau+\sigma\pi+1}{-\sigma} = -2$, $s = r + \pi + 1 = r = -2$, & l'aire $S.ydx = -\frac{1}{\sigma}x^{2\sigma} \times (a+bx^{\sigma})^{0}(-\frac{1}{2b} + \frac{a}{b^{2}x^{\sigma}} - \frac{a^{2}}{0.\,b^{3}x^{2\sigma}} + \frac{a^{3}}{b^{4}x^{3\sigma}} -$ &c.) laquelle fuite ne donne point l'aire, a caufe du troifieme terme infini $-\frac{a^{2}}{0.\,b^{3}x^{2\sigma}}$; on cherchera donc cette aire par la quadrature de la courbe la plus fimple, en fuppofant $x^{\sigma} = z$; d'ou l'on tire $x^{3\sigma-1}dx(a+bx^{\sigma})^{-1} = \frac{1}{\sigma}z^{2}dz(a+bz)^{-1}$, différentielle qui depend de la quadrature d'une courbe, dont l'abfciffe eft z, & l'ordonnée $(a+bz)^{-1}$, puifqu'en retranchant deux fois l'unité de l'expofant de z^{2}, il refte $z^{0} = 1$. Cette courbe eft une hyperbole, dont l'aire a pour différentielle $\frac{dz}{a+bz} = \frac{\frac{1}{b}dz}{z+\frac{a}{b}}$, & pour intégrale $\frac{1}{b}.L.(z+\frac{a}{b})$ $=$

$=\frac{1}{b}.\ L.\left(\frac{a+bz}{b}\right)=A=S.z^{0}\,dz(a+bz)^{-1}$. On remontera par le Corollaire du Theoreme V. (Art. CCXVII.) a l'aire $B=S.z\,dz(a+bz)^{-1}=\frac{z-Aa}{b}$, & de celle-cy a l'aire $C=S.z^{2}\,dz(a+bz)^{-1}=\frac{z^{2}}{2b}-\frac{az}{bb}+\frac{aa}{b^{3}}L.\left(\frac{a+bz}{b}\right)$; d'ou l'on tire l'aire

$$S.\frac{1}{\sigma}z^{2}\,dz(a+bz)^{-1}=\frac{x^{2\sigma}}{2\sigma b}-\frac{ax^{\sigma}}{\sigma bb}+\frac{aa}{\sigma b^{3}}.\ L.\left(\frac{a+bx^{\tau}}{b}\right).$$

On trouveroit auſſi cette aire plus briévement en diviſant le numerateur de la fraction $\frac{1}{\sigma}.\frac{z^{2}\,dz}{a+bz}$ par ſon denominateur; car cette fraction, en diviſant le numerateur, & le denominateur par b, devient $\frac{\frac{1}{\sigma b}z^{2}dz}{z+\frac{a}{b}}$, & en ſuppoſant $\frac{a}{b}=c$, on a $\frac{z^{2}}{z+c}=z-\frac{cz}{z+c}=z-c+\frac{cc}{z+c}$; par conſequent $S.\frac{z^{2}dz}{z+c}=\frac{z^{2}}{2}-cz+cc\ L.(z+c)$, & $S.\frac{\frac{1}{\sigma b}z^{2}dz}{a+bz}=\frac{z^{2}}{2\sigma b}-\frac{az}{\sigma bb}+\frac{aa}{\sigma b^{3}}L.\left(\frac{a+bz}{b}\right)$, comme on l'avoit trouvé par la methode de Newton.

EXEMPLE IV. $y=x^{\tau}(a+bx^{2})^{-\frac{1}{2}}$; en comparant cette ordonnée avec $x^{\tau}(a+bx^{\sigma})^{\pi}$, on trouve

$\sigma = 2$, $\pi = -\frac{1}{2}$, $r = \frac{\tau + 1}{2}$, $s = r + \pi + 1 = \frac{\tau}{2} + 1$; d'ou l'on conclut que, ſi l'expoſant τ eſt un nombre poſitif, la ſuite de l'aire ne finira point; mais ſi τ eſt un nombre entier negatif, & pair, cette ſuite finira, & on aura l'aire $S. y\,dx$ algebriquement. Suppoſé, par exemple, que $\tau = -2$, on aura $r = -\frac{1}{2}$, $s = o$,

& $S. y\,dx = \frac{1}{2} x^{-1} (a + bx^2)^{\frac{1}{2}} (-\frac{2}{a}) = \frac{-(a+bx^2)^{\frac{1}{2}}}{ax}$.

CCXLVI.

On voit par les exemples precedents, & par ce que nous avons demontré dans ce Chapitre, qu'il y a des courbes doublement quarrables, d'autres qui ne ſont quarrables, que ſous une des formes de leurs ordonnées, & d'autres enfin qui ſe reduiſent a des ſeries infinies. Quant a ces dernieres nous avons demontré qu'on pouvoit les comparer avec les quadratures des courbes les plus ſimples: il ſuffit de ſe rappeller les Theoremes ſuivans dont nous avons donné la demonſtration. Si A, B repreſentent des aires de deux courbes binomes, en ſorte que l'expoſant de R dans l'ordonnée de la courbe, qui appartient a l'aire A, ſurpaſſe d'une unité l'expoſant de R dans l'ordonnée qui repond a l'aire B, & conſiderant l'une de ces aires, comme l'aire cherchée, & l'autre comme l'aire donnée,

on aura

$$1.^\circ \quad B = \frac{\overline{\theta + \lambda n}. A - x^\theta R^\lambda}{\lambda n e}$$

$$2.^\circ \quad A = \frac{\lambda n e B + x^\theta R^\lambda}{\theta + \lambda n}$$

De plus si A, B repreſentent deux aires, enſorte que l'expoſant de x dans l'ordonnée, qui appartient a l'aire B, ſurpaſſe de n l'expoſant de x dans l'ordonnée qui repond a l'aire A, les expreſſions $x^{\theta - 1} R^{\lambda - 1}$, & $x^{\theta + n - 1} R^{\lambda - 1}$ repreſenteroient des ordonneés generales, & on determineroit par une aire donnée les aires de toutes les courbes binomes, puiſque nous avons demontré qu'on auroit

$$3.^\circ \quad B = \frac{x^\theta R^\lambda - \theta e A}{\overline{\theta + \lambda n}. f}$$

$$4.^\circ \quad A = \frac{x^\theta R^\lambda - \overline{\theta + \lambda n}. f B}{\theta e}$$

Nous appliquerons ces Theoremes a quelques exemples, & nous expoſerons dans la ſuite de cet Article les Theoremes qui appartiennent aux courbes trinomes &c.

EXEMPLE V. Soit l'ordonnée d'une courbe $\frac{x^{\theta - 1}}{(e + f x^n)^{\lambda + 1}}$, ou $x^{\theta - 1} (e + f x^n)^{-\lambda - 1}$, λ etant un nombre entier, on aura par le premier Theoreme, en faiſant $e + f x^n = R$, $B = \frac{\overline{\theta - \lambda n}. A - x^\theta R^{-\lambda}}{-\lambda n e}$; A etant l'aire d'une

courbe, dont l'ordonnée $\frac{x^{\theta-1}}{(e+fx^n)^\lambda}$; & B l'aire d'une courbe, dont l'ordonnée $\frac{x^{\theta-1}}{(e+fx^n)^{\lambda+1}}$. On voit que, si $\theta = \lambda n$, la courbe sera quarrable algebriquement, puisque $\theta - \lambda n = o$; autrement elle dependra de l'aire A, & l'aire A de l'aire d'une courbe dont l'ordonnée $\frac{x^{\theta-1}}{(e+fx^n)^{\lambda-1}}$. Si nous appellons cette aire C, on aura $A = \frac{(\theta - \overline{\lambda-1}.n)C - x^\theta R^{-\lambda+1}}{(-\lambda+1)ne}$; donc, si $\theta = \overline{\lambda-1}.n$ la courbe A sera quarrable algebriquement, & par consequent la courbe B, qui depend de A, seroit aussi quarrable; mais autrement l'aire A dependra de l'aire C, & celle-cy de l'aire d'une autre courbe, dont l'ordonnée $\frac{x^{\theta-1}}{(e+fx^n)^{\lambda-2}}$, & ainsi de suite jusqu'a ce qu'on parvienne a l'unité, c'est a dire, a une ordonnée $\frac{x^{\theta-1}}{e+fx^n}$: Donc l'aire de la courbe proposée pourra se trouver algebriquement ou se rapporter a l'aire d'une courbe, dont l'ordonnée est $\frac{x^{\theta-1}}{e+fx^n}$. Cette derniere aire depend du cercle, ou de l'hyperbole, ou de l'une & de l'autre, comme nous l'avons demontré plusieurs fois.

EXEMPLE VI. Soit $\frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}$ l'ordonnée d'une

courbe, dont on veut comparer l'aire avec celle d'une autre courbe, dont l'ordonnée soit $\sqrt{a^2-x^2}$, qu'on voit aisément être celle d'un cercle, dont le rayon a, & l'abscisse x prise du centre. On prepare la premiere ordonnée en cette forme $x^{3-1}(a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}$, & l'aire qui lui appartient soit nommée β. Cette aire etant supposée donnée, on trouvera l'aire qui repond a l'ordonnée $x^{3-1}(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}$, qui n'est que l'ordonnée precedente, dans laquelle on a augmenté de l'unité l'exposant $-\frac{1}{2}$: soit α l'aire de cette nouvelle ordonnée. En comparant avec le Theoreme I. precedent on a $\alpha=A$, $B=\beta$, $\theta=3$, $n=2$, $\lambda=\frac{1}{2}$, $e=aa$, & par le second $\alpha=\frac{a^2\beta+x^3(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}}{4}$, equation des aires α & β. De plus par le moyen de l'aire α qui appartient a l'ordonnée $x^{3-1}(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}$, on trouve l'aire qui repond a l'ordonnée $x^{1-1}(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{a^2-x^2}$, ayant diminué de deux unités l'exposant de x hors de la parenthese. Si on appelle γ l'aire qui repond a l'ordonnée $\sqrt{a^2-x^2}$, & qu'on reduise la premiere ordon-

née qui repond a α ſous cette forme $x^{3-1}(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}-1}$, & l'autre qui appartient a γ a cette forme $x^{1-1}(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}-1}$, on aura, en comparant avec les Theoremes 3, 4, $B = \alpha$, $A = \gamma$, $\lambda = \frac{3}{2}$, $e = aa$, $f = -1$; d'ou l'on tire $\gamma = \frac{x(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}} + 4\alpha}{aa} = x\sqrt{a^2 - x^2} + \beta$, en ſubſtituant a la place de α ſa valeur trouvée cy-deſſus. Donc $\beta = \gamma - x\sqrt{a^2 - x^2}$; mais γ appartient a l'aire d'un cercle; donc β eſt egale a cette aire circulaire, moins le rectangle compris ſous l'ordonnée $\sqrt{a^2 - x^2}$, & l'abſciſſe x. Cet exemple eſt très aiſé, & nous ne nous en ſervons que pour faire voir plus clairement le Cas dans lequel on augmente l'expoſant hors & dedans la parentheſe.

CCXLVII.

Il faut bien obſerver qu'on pourroit facilement ſe tromper, ſi on vouloit ſe ſervir ſans precaution du Theoreme V. de Newton, pour reduire l'intégrale de la différentielle $x^{r}dx(a + bx^{r} + cx^{2r} + \&c.)^{\pi}$ aux quadratures des courbes les plus ſimples, ou pour re-

monter de celles-cy a celles-la. En ajoutant a l'expoſant π du polynome un nombre entier $\pm p$, & a l'expoſant τ la quantité $\pm \sigma q$, dans laquelle q eſt auſſi un nombre entier, l'intégrale de la différentielle $x^{\tau \pm \sigma q} dx (a + bx^{\sigma} + cx^{2\sigma} + \&c.)^{\pi \pm p}$ ne depend pas toujours des mêmes quadratures, lorſqu'on donne differentes valeurs aux nombres entiers q & p; car, ſi on ſuppoſe $\pm p = -\pi$, l'expoſant du polynome devient zero, le polynome devient $= 1$, & la différentielle $= x^{\tau \pm \sigma q} dx$, qu'on peut toujours intégrer algebriquement, ou par la quadrature de l'hyperbole, de même que dans le cas ou $\pi \pm p$ eſt un nombre entier poſitif, quoique dans d'autres ſuppoſitions l'intégrale depende d'autres quadratures. Par exemple, l'intégrale de la différentielle $dx(aa + xx)^{-1}$ depend de la quadrature du cercle, & celle de la différentielle $dx(aa + xx)^{-1+p}$ eſt algebrique, quand p eſt un nombre entier poſitif; l'intégrale de la différentielle $dx(a + bx)^{-1}$ depend de la quadrature de l'hyperbole, & celle de $dx(a + bx)^{-1 \pm p}$ ſe trouve abſolument, lorſque p eſt un nombre entier quelconque. Il en eſt de même des changemens qu'on fait dans la différentielle propoſée par l'addition de $\pm \sigma q$ a l'expoſant τ; cette addition fait ſouvent que l'intégrale ne depend

pas des mêmes quadratures; par exemple, l'intégrale de $x^{0}dx(aa-xx)^{-\frac{1}{2}}$ depend de la quadrature du cercle, & celle de $x^{-2}dx(aa-xx)^{-\frac{1}{2}}$ se trouve absolument.

Pour eviter ces inconveniens, lorsqu'on veut trouver l'intégrale d'une différentielle de la forme que nous venons de marquer, on la cherchera d'abord, comme le prescrit M.[r] Newton par les deux formules, ou les deux suites cy-dessus; si elles se trouvent infinies, on reduira l'intégrale cherchée aux quadratures des courbes les plus simples, suivant la methode du Probleme III., & s'il restoit quelque doute sur les reductions, on remonteroit par les calculs du Theoreme V., & de ses Corollaires, a l'intégrale de la différentielle proposée, dont on prendra la différentielle, pour s'assurer entierement. Avec ces précautions la methode de Newton ne peut être sujette a erreur.

CCXLVIII.

PROBLEME II. Trouver l'intégrale de la différentielle trinome $x^{\gamma}(a+bx^{\tau}+cx^{2\tau})^{\pi}$, ou la reduire aux quadratures des courbes les plus simples.

SOLUTION. On resoudra ce Probleme par les suites, comme dans le Cas precedent.

L.

I.° Dans cette différentielle l'ordonnée $y = x^{\tau} \times (a + bx^{\sigma} + cx^{2\sigma})^{\pi} = x^{\tau + 2\sigma\pi}(c + bx^{-\sigma} + ax^{-2\sigma})^{\pi}$; c'est pourquoi on la comparera sous ces deux formes avec l'ordonnée $x^{\theta - 1}(e + fx^{n} + gz^{2n})^{\lambda - 1}$, qu'on trouve, en faisant evanouïr tous les termes après le troisieme dans l'ordonnée generale du Theoreme III. $x^{\theta - 1}(e + fx^{n} + gx^{2n} + bx^{3n} + \&c.)^{\lambda - 1}$, & on aura l'aire $S.ydx = x^{\theta}(e + fx^{n} + gx^{2n})^{\lambda}\left(\frac{\frac{1}{n}}{re} - \frac{sfA}{\overline{r+1}.e}x^{n} - \left(\frac{(s+1)fB + tgA}{\overline{r+2}.e}\right)x^{2n} - \left(\frac{(s+2)fC + (t+1)gB}{\overline{r+3}.e}\right)x^{3n} - \left(\frac{(s+3)fD + (t+2)gC}{\overline{r+4}.e}\right)x^{4n}\ \&c.\right)$ (Art. CCVIII.) en supposant dans cette suite $\frac{\theta}{n} = r$, $s = r + \lambda$, $t = s + \lambda$, $A = \frac{\frac{1}{n}}{re}$, $B = -\frac{sfA}{\overline{r+1}.e}$, $C = -\left(\frac{(s+1)fB + tgA}{\overline{r+2}.e}\right)$, $D = -\left(\frac{(s+2)fC + (t+1)gB}{\overline{r+3}.e}\right)$, &c.; en comparant l'ordonnée y, sous la forme $x^{\tau}(a + bx^{\sigma} + cx^{2\sigma})^{\pi}$, avec l'ordonnée $x^{\theta - 1}(e + fx^{n} + gx^{2n})^{\lambda - 1}$, on trouve $e = a$, $f = b$, $g = c$, $\theta = \tau + 1$, $\lambda = \pi + 1$, $n = \sigma$, $r = \frac{\tau + 1}{\sigma}$, $s = r + \pi + 1$, $t = s + \pi + 1$, l'aire $S.ydx =$

$$x^{\tau+1}(a+bx^{\sigma}+cx^{2\sigma})^{\pi+1}\left(\frac{\frac{1}{\sigma}}{ra}-\frac{sbA}{\overline{r+1}\cdot a}x^{\sigma}-\left(\frac{(s+1)bB+tcA}{\overline{r+2}\cdot a}\right)x^{2\sigma}-\left(\frac{(s+2)bC+(t+1)cB}{\overline{r+3}\cdot a}\right)x^{3\sigma}-\right.$$

$\left.\&c.\right)$. $A=\frac{\frac{1}{\sigma}}{ra}$, $B=-\frac{sbA}{\overline{r+1}\cdot a}$, $C=\frac{-(s+1)bB-tcA}{\overline{r+2}\cdot a}$ &c., en comparant la même ordonnée y sous l'autre forme $x^{\tau+2\sigma\pi}(c+bx^{-\sigma}+ax^{-2\sigma})^{\pi}$ avec $x^{\theta-1}(e+fx^{n}+gx^{2n})^{\lambda-1}$, on trouve $e=c$, $f=b$, $g=a$, $\theta=\tau+2\sigma\pi+1$, $\lambda=\pi+1$, $n=-\sigma$, $r=\frac{\tau+2\sigma\pi+1}{-\sigma}$, $s=r+\pi+1$, $t=s+\pi+1$, & l'aire $S.\,ydx=$

$$x^{\tau+1-2\tau}(a+bx^{\sigma}+cx^{2\sigma})^{\pi+1}\left(\frac{-\frac{1}{\sigma}}{re}-\frac{sbA}{\overline{r+1}\cdot cx^{\sigma}}-\left(\frac{(s+1)bB+taA}{\overline{r+2}\cdot cx^{2\sigma}}\right)-\left(\frac{(s+2)bC+(t+1)aB}{\overline{r+3}\cdot cx^{3\sigma}}\right)-\&c.\right),$$

$$A=\frac{-\frac{1}{\sigma}}{re},\quad B=-\frac{sbA}{\overline{r+1}\cdot c},\quad C=-\left(\frac{(s+1)bB+taA}{\overline{r+2}\cdot c}\right).$$

II.° Lorſque l'une des deux ſuites de l'aire $S.\,ydx$ ſera finie, on aura l'intégrale algebrique de la différentielle trinome propoſée; mais ſi ces deux ſuites ſont infinies, il faudra reduire cette différentielle a celles des aires d'autres courbes les plus ſimples, en ſuppoſant $x^{\sigma}=z^{v}$; d'ou l'on tirera $x^{\tau}dx(a+bx^{\sigma}+cx^{2\sigma})^{\pi}=$

$\frac{\nu}{\sigma} z^{\frac{\nu\tau+\nu-\sigma}{\sigma}} dz(a+bz^{\nu}+cz^{2\nu})^{\pi}$, dans laquelle on donnera a l'expoſant ν telle valeur qu'on voudra, &, en le ſuppoſant $=1$, la nouvelle ordonnée ſera $\frac{1}{\sigma} z^{\frac{\tau+1-\sigma}{\sigma}}$ $(a+bz+cz^{2})^{\pi}$. Enſuite on retranchera des expoſans $\frac{\tau+1-\sigma}{\sigma}$, & π autant de fois $+1$, ou -1, qu'il faudra pour rendre les puiſſances, dont ils ſont expoſans les plus petites qu'il ſera poſſible, & on parviendra aux courbes les plus ſimples, qu'on puiſſe trouver par ce moyen. Chacune de ces courbes en fournira une autre (Art. CCXXIV.), qui pourra être encore plus ſimple, en ſuppoſant $z=\frac{1}{u}$; en fin en comparant ces courbes entr'elles au moyen du Theor. I., & des Coroll. IX. & X. du Theor. VII., on pourra encore quelquefois en deduire d'autres courbes plus ſimples. Lorſqu'on aura trouvé deux courbes les plus ſimples, on regardera leurs aires comme données, & de la on remontera (par le I.er Cas du Theor. V., ou par le Cas du trinome) a l'aire qu'on cherche.

III.° Avant d'eclaircir ce que nous avons dit par des Exemples, il ſera a propos, pour eviter la longueur des calculs, d'examiner la ſerie precedente, & d'en deduire quelques regles, pour connoître ſi une courbe trinome eſt quarrable. Ayant ſubſtitué dans la forme generale

des courbes trinomes les valeurs particulieres de la courbe proposée, s'il arrive que deux termes consecutifs de la serie pris separément soient egaux a zero, la courbe est quarrable, & son aire est exprimée par la partie de la serie, qui precede ces termes; pourvû qu'aucun des termes precedens ne devienne infiniment grand, par la supposition de r egal a zero, ou egal a un nombre entier negatif plus petit que le nombre des termes réels, ou qui precedent les termes egaux a zero; c'est a dire que, si la serie ne contient que deux termes, il ne peut arriver que $r = o$, ou $r = -1$; si elle en contient trois, r ne peut être $= o$, $= -1$, $= -2$, & ainsi de suite; l'aire deviendroit alors infinie. On sera convaincû de cette regle par la seule inspection de la serie; il suffit d'observer qu'il n'y a que deux coefficiens tels que A, B, C, D, *&c.* dans chaque terme complexe de cette suite, & ces lettres A, B, C, D, *&c.* denotent deux a deux les coefficients des deux termes, qui precedent immediatement; de plus chacun de ces coefficiens est facteur de l'une des deux parties du numerateur, dans lequel ils se trouvent. Cela etant consideré, il est evident que si deux termes quelconques consecutifs s'evanouïssent, & par consequent leurs coefficiens representés par A, B, C, D, *&c.*, il faut aussi que le terme suivant devienne egal a zero, puisqu'il contient des coefficiens $= o$, & par la même

raiſon tous les termes ſuivans s'evanouïront a l'infini; donc la courbe ſera quarrable, a moins que par la ſuppoſition de $r = o$, ou a quelque nombre negatif entier plus petit que le nombre des termes réels de la ſuite, il n'arrive que le denominateur de quelque terme devienne zero, le numerateur reſtant réel. Dans tout autre Cas, ſi deux termes conſecutifs de la ſuite ſont $= o$, tous les termes ſuivans a l'infini deviennent zero, & la ſuite finit, ou commençent les deux termes egaux a zero. Il eſt clair qu'une courbe de cette forme n'eſt pas quarrable par le ſeul premier terme de la ſuite $\frac{\frac{1}{n}}{re} \cdot x^s (e + fx^n + gx^{2n})^\lambda$. Car ſuppoſons que tous les termes, excepté le premier, ſoient $= o$, on aura le troiſieme terme $\frac{-(s+1) \cdot fB - rgA}{\overline{r+2} \cdot e} x^{2n} = o$, & puiſque le ſecond terme $= o$, & par conſequent ſon coefficient $B = o$, il s'enſuit que $rgA = o$, ce qui ne peut arriver icy, que lorſque $r = o$; de plus le ſecond terme $-\frac{sfA}{\overline{r+1} \cdot e} x^n = o$, ce qui ne peut arriver dans ce Cas, que lorſque $s = o$; Donc, ſi tous les termes de la ſuite, excepté le premier, s'evanouïſſent, il faut que $r = o$ $= s$; mais $r = s + \lambda$, donc $\lambda = o$; de plus $r = s - \lambda$, & par conſequent $r = o$; d'ou il ſuit que le premier terme de la ſuite eſt infini, & par conſequent la courbe

n'eſt pas quarrable. On peut appliquer ce raiſonement aux deux cas, qui expriment l'aire de la courbe dans la ſuppoſition de n affirmatif, ou negatif. Si on parvient dans l'un & l'autre cas a deux termes conſecutifs qui ſoyent egaux a zero, la courbe eſt doublement quarrable. Mais il faut obſerver que r etant un nombre entier negatif, plus petit que le nombre des termes réels de la ſuite, l'aire peut être finie & la courbe quarrable, lorſque le numerateur, & le denominateur s'evanouïſſent tous les deux. Ainſi dans le cas de $r = -2$, le denominateur du troiſieme terme $= \overline{r+2}.e$, ce qui rend le terme infini, & par conſequent auſſi l'aire infinie, pourvû que le numerateur $\overline{s+1}.fB + rgA$ ne devienne pas en même tems $= o$; car ſi le numerateur $= o$, le troiſieme terme eſt auſſi $= o$, & par conſequent la courbe eſt quarrable ſous les conditions precedentes.

Ce que nous venons de dire pourra ſervir a faire decouvrir pluſieurs conditions dans l'ordonnée de la courbe propoſée qui la rendront quarrable. Soyent ſuppoſés le troiſieme & le quatrieme termes $= o$, c'eſt a dire

$$-\left(\frac{(s+1)fB + tgA}{\overline{r+2}.e}\right)x^{2n}, \& -\left(\frac{(s+2)fC + (t+1)gB}{\overline{r+3}.e}\right)x^{3n}$$

$= o$; on aura $C = -\left(\frac{(s+1)fB + tgA}{\overline{r+2}.e}\right) = o$, & par conſequent en ſubſtituant zero a la place de C dans la ſe-

conde equation, & divisant par $-\frac{x^{3n}}{\overline{r+3.e}}$, on aura $\overline{r+1}.gB=o$; & par ce que ny g, ny B ne sont egaux a zero, il s'ensuit que $r+1=o$, ou $r=-1$: donc $s=r-\lambda=-1-\lambda$, & $r=s-\lambda=-1-2\lambda$; & en substituant ces valeurs de s & de r dans la premiere equation, nous aurons $-\left(\frac{(s+1)fB+rgA}{\overline{r+2.e}}\right)x^{2n}=o$, & en divisant par $-\frac{x^{2n}}{\overline{r+2.e}}$, on aura $-\lambda fB-gA=o$ substituant a la place de B sa valeur, c'est a dire, $-\frac{sfA}{\overline{r+1.e}}=-\frac{\overline{\lambda+1}.fA}{2\lambda e}$, on aura $\frac{\overline{\lambda+1}.f^2A}{2e}-gA=o$, &, en reduisant, $\lambda=\frac{2eg}{f^2}-1$. De plus $\frac{\theta}{n}=r=-1-2\lambda$: donc $\frac{\theta}{n}=1-\frac{4eg}{f^2}$; d'ou l'on tire cette regle, que λ etant $=\frac{2eg}{f^2}-1$, & $\frac{\theta}{n}=1-\frac{4eg}{f^2}$, le troisieme & le quatrieme termes de la suite s'evanouïssent, & par consequent la courbe, dont l'ordonnée est telle, que $\lambda=\frac{2eg}{f^2}-1$, & $\frac{\theta}{n}=-\frac{4eg}{f^2}$ sera quarrable, pourvû que $1-\frac{4eg}{f^2}$, qui est la valeur de $\frac{\theta}{n}$, ou r, ne soit pas $=o$, comme nous avons demontré. Il est evident qu'au lieu de considerer le troisieme, & le quatrieme ter-

mes egaux a zero, on pourroit confiderer le quatrieme & le cinquieme, le cinquieme & le fixieme, & ainfi de fuite deux a deux, mais on arriveroit a des equations eleveés, & trop compliquées; il fuffira d'affigner certaines conditions, fans lefquelles une courbe trinome ne peut être quarrable.

I.° Si $\frac{\theta}{n}+2\lambda$, & $-\frac{\theta}{n}+2$ font $=o$, ou font des fractions quelconques, ou des entiers pofitifs, la courbe n'eft pas quarrable; car les deux expreffions precedentes font les deux valeurs de t conformement aux deux formes de l'ordonnée: or nous avons demontré que les feries, qui expriment l'aire, ne peuvent être finies, a moins que t ne foit un entier negatif.

II.° Si $\frac{\theta}{n}$, & $-\frac{\theta}{n}-2\lambda+2$ font $=o$, la courbe n'eft pas quarrable; car ce font les deux valeurs de r correfpondantes aux deux expreffions de l'ordonnée. Or dans ces cas l'aire eft infinie, comme nous avons demontré.

III.° Si $\lambda=o$, la courbe n'eft pas quarrable; car dans ce cas $r=t-2\lambda=t$, mais la courbe ne peut être quarrée, fi t n'eft pas un entier negatif. De plus fi t etant un nombre entier negatif, la fuite fe trouve interrompûe, le dernier terme réel de la fuite devient infiniment grand; car le denominateur eft $=o$, quand $r=t$, & t un nombre entier negatif, & par con-

conſequent l'aire eſt infiniment grande. Il nous reſte maintenant a determiner par ces obſervations les différens cas, dans leſquels une courbe trinome, dont l'ordonnée a la forme $x^{\theta-1}(e+fx^n+gx^{2n})^{\lambda-1}$ eſt quarrable, ou ne l'eſt pas, & ſi elle eſt doublement quarrable.

On reduit d'abord l'ordonnée a la forme dans laquelle n eſt affirmatif, & on la compare avec les conditions precedentes. Si on trouve quelqu'exception qui empêche la courbe d'être quarrable, alors il eſt inutile d'aller plus loin; mais ſi on n'en trouve aucune, il faut mettre l'ordonnée ſous l'autre forme, dans laquelle n eſt negatif, & on cherchera les deux valeurs de r dans l'une & l'autre expreſſion de l'ordonnée; ces valeurs ſont, ou toutes les deux des nombres entiers negatifs, ou une ſeulement. Si on ne trouve qu'une valeur de r, qui ſoit un nombre entier negatif, on n'a beſoin que de la ſerie, qui appartient a la forme de l'ordonnée, dans laquelle r eſt un entier negatif; mais ſi les deux valeurs de r ſont des entiers negatifs, il faut eprouver les deux ſeries dans la forme de n poſitif, & de n negatif. Si une des valeurs de r ſeulement eſt un nombre entier negatif, il faut que $r+1$ ſoit $=o$, ou $r+2=o$, ou $r+3=o$, &c.; & ayant ſubſtitué ces valeurs particulieres dans tous les termes de la ſerie depuis le premier, juſqu'a ce

qu'on arrive au terme de la ſerie qui precede immediatement celui, ou $r+1=o$, $r+2=o$, $r+3=o$, &c.; ſi ce terme n'eſt pas $=o$, la courbe n'eſt pas quarrable; mais ſi ce terme eſt $=o$, elle pourra ſe quarrer, pourvû que r ne ſoit pas $=o$, ou un nombre entier negatif auſſi petit, ou plus petit que r; ſous ces conditions la courbe eſt quarrable, & ſon aire eſt egale a la partie de la ſerie qui precede le terme $=o$.

Si les deux valeurs de r etoient des nombres entiers negatifs, il faudra eſſayer les deux ſeries, comme nous avons dit, & s'il arrive que dans aucune des deux le terme qui precede immediatement celui, ou $r+1=o$, $r+2=o$, &c. ne ſoit pas $=o$, alors la courbe n'eſt pas quarrable; ſi cette condition ſe trouve dans l'une, elle eſt quarrable par cette ſerie; ſi dans toutes les deux, elle eſt doublement quarrable, avec les exceptions precedentes, que r ne ſoit pas $=o$, ny auſſi petit, ou moindre que r. Ces regles ne peuvent avoir aucune difficulté, ſi on conſidere la forme des ſuites precedentes avec attention; cependant, pour ne laiſſer aucun doute, il eſt a propos de faire voir plus clairement que, ſi le terme de la ſerie qui precede immediatement celui ou $r+1=o$, $r+2=o$, $r+3=o$, &c. n'eſt pas egal a zero, la ſerie devient infinie. Soit, pour cela, ſuppoſé $r=-2$, ou $r+2=o$; le terme ou ſe trouve $r+2$ eſt le cinquieme. Suppoſons main-

tenant que le quatrieme terme — $\left(\frac{(r+2)fC+(r+1)gB}{\overline{r+3}.e}\right)x^{3n}$ ne soit pas $=o$, la suite est infinie. Car si elle etoit finie, le quatrieme terme, ou quelque terme aprés le quatrieme devroit être le dernier terme réel de la suite. Or ce terme ne peut être le quatrieme; car puisque les deux termes suivans $-\left(\frac{(r+3)fD+(r+2)gC}{\overline{r+4}.e}\right)x^{4n}$, & $-\left(\frac{(r+4)fE+(r+3)gD}{\overline{r+5}.e}\right)x^{5n}=o$, il faut que E soit $=o$, puisque E est le coefficient du terme precedent qui est $=o$; donc $\frac{\overline{r+3}.gD}{r+5.e}x^{5n}=o$, & par consequent $\overline{r+3}.gD=o$; mais g ne peut être zero par la nature du trinome, & D ne peut être zero (par supposition), puisqu'il est un coefficient du quatrieme terme; donc $r+3=o$, ce qui est contraire a la supposition, car $r+2=o$; on voit par le même raisonement, que le 5ᵉ, 6ᵉ, 7ᵉ, &c. terme ne pourroient être les derniers termes réels de la suite, qui, par consequent, seroit infinie. La demonstration est la même en supposant $r=-1$, $r=-3$, $r=-4$, &c., quelque soit le nombre entier negatif $=r$.

EXEMPLE I. Soit $\frac{a}{(2x^9+3x^{12}+3x^{15})^{\frac{2}{3}}}=y$; on re-

duit cette ordonnée a la forme $ax^{-5-1}(2+3x^3+3x^6)^{\frac{1}{3}-1}$; & on a en comparant $\lambda=\frac{1}{3}$, $\theta=-5$, $n=3$, $r=\frac{\theta}{n}=-\frac{5}{3}$, $e=2$, $f=3$, $g=3$; donc $\lambda=\frac{1}{3}=\frac{2eg}{f^2}-1$; de plus $r=-\frac{5}{3}=1-\frac{4eg}{f^2}$; d'ou l'on conclût par les regles precedentes, que la courbe peut être quarrée; en effet fubftituant les valeurs determinées dans l'aire generale de la courbe trinome, on trouve l'aire propofée $\frac{3}{10x^2}\cdot a\sqrt[3]{2+3x^3+3x^6}-\frac{1}{10x^5}\cdot a\sqrt[3]{2+3x^3+3x^6}=\left(\frac{0.3}{x^2}-\frac{0.1}{x^5}\right)\times a\sqrt[3]{2+3x^3+3x^6}$, tous les termes de la ferie devenant $=0$, a caufe de $t=r+2\lambda=-1$. On compareroit de même cette ordonnée avec l'autre forme.

Exemple II. Soit l'ordonnée $y=x^{\sigma-1}(a+bx^\sigma+cx^{2\sigma})^{-1}$; en la comparant avec $x^\tau(a+bx^\sigma+cx^{2\sigma})^\pi$, on trouve $\tau=\sigma-1$, $\pi=-1$, $r=\frac{\tau+1}{\sigma}=1$, $s=r+\pi+1=1$, $t=s+\pi+1=1$, d'ou l'on voit, fans aller plus loin, par la regle precedente, que la courbe n'eft pas quarrable, & en effet en fubftituant ces valeurs dans la premiere fuite de l'aire, on a

$S.\, y\,dx = x^{\tau}\,(\frac{\frac{1}{\sigma}}{a} - \frac{bA}{2a}x^{\tau} - (\frac{2bB+cA}{3a})x^{2\sigma} -$ &c. a l'infini), & par l'autre comparaiſon on trouve $r = \frac{\tau+1\,\sigma\,\pi+1}{-\tau} = 1$, $s = r + \pi + 1 = 1$, $t = s + \pi + 1 = 1$, par ou l'on voit de nouveau que la courbe ne peut être quarrée; ce qu'on connoît d'ailleurs en ſubſtituant; car $S.\, y\,dx = x^{-\sigma}\,(-\frac{\frac{1}{\sigma}}{c} - \frac{bA}{2cx^{\tau}} -$ &c. a l'infini). Les deux ſuites de l'aire etant infinies, il faut reduire l'intégrale cherchée aux aires des courbes les plus ſimples. En ſuppoſant $x^{\sigma} = z$, on trouve la différentielle propoſée $x^{\sigma-1}dx(a + bx^{\sigma} + cx^{2\sigma})^{-1} = \frac{1}{\sigma}dz(a + bz + czz)^{-1} = \frac{\frac{1}{\sigma}dz}{czz + bz + a} = \frac{\frac{1}{\sigma c}dz}{zz + \frac{bz}{c} + \frac{a}{c}} = \frac{\frac{1}{\sigma c}dz}{zz + 2qz + p}$, en faiſant $\frac{b}{c} = 2q$, & $\frac{a}{c} = p$. En ſuppoſant encore $z + q = u$, on aura $dz = du$, $zz + 2qz + p = uu + p - qq$, & $\frac{\frac{1}{\sigma c}dz}{zz + 2qz + p} = \frac{\frac{1}{\sigma c}du}{uu + p - qq}$. Or ſi $p - qq = rr$ on aura $S.\, \frac{rr\,du}{uu + rr} = A$, arc de cercle, dont le rayon eſt r, & la tangente u; par conſequent $S.\, \frac{\frac{1}{\sigma c}du}{uu + rr} =$

$\frac{A}{\sigma c r r}$; enfin, si $p < qq$, ou si $p - qq = -rr$, on aura

$S. \frac{\frac{1}{\sigma c} du}{uu - rr} = \frac{1}{2 \sigma c r} \cdot L. \left(\frac{u - r}{u + r}\right)$.

EXEMPLE III. Soit l'ordonnée $y = x^{2\sigma - 1} (a + b x^{\sigma} + c x^{2\sigma})^{-1}$; on trouve par les comparaisons que les deux suites de l'aire $S. y dx$ sont infinies: on fera donc $x^{\sigma} = z$, & on aura $y dx = \frac{1}{\sigma} z dz (a + b z + czz)^{-1}$, différentielle qui se reduit a celle de l'exemple précedent $\frac{1}{\sigma} dz (a + bz + czz)^{-1}$, en retranchant l'unité de l'exposant 1 de z; on reduira donc cette différentielle a la forme $\frac{\frac{1}{\sigma c} du}{uu + p - qq}$, comme dans l'exemple precedent; & par ce qu'on a supposé $z + q = u$, on aura $z = u - q$, $zz = uu - 2qu + qq$, $z dz = u du - q du$, & la différentielle $\frac{z dz}{zz + 2qz + p} = \frac{u du}{uu + p - qq}$; par consequent l'intégrale $S. \frac{\frac{1}{\sigma c} z dz}{zz + 2qz + p} = \frac{1}{\sigma c} S. \frac{u du}{uu + p - qq} - \frac{q}{\sigma c} S. \frac{du}{uu + p - qq}$. Or on a deja trouvé l'intégrale $S. \frac{du}{uu + p - qq}$ dans l'exemple precedent, &

l'intégrale $S. \frac{u\,du}{uu+p-qq} = \frac{1}{2} L. (uu+p-qq)$, comme on la trouve en suppoſant $uu = \mu$, ce qui donne $u\,du = \frac{1}{2} d\mu$, $\frac{u\,du}{uu+p-qq} = \frac{\frac{1}{2} d\mu}{\mu+p-qq}$, & $S. \frac{u\,du}{uu+p-qq} = \frac{1}{2} L. (\mu+p-qq) = \frac{1}{2} L. (uu+p-qq)$. On peut intégrer de la même maniere la différentielle $\frac{z^\nu dz}{zz+2qz+p}$, lorſque l'expoſant ν eſt un nombre entier poſitif quelconque, en diviſant le numerateur par le denominateur; car ſi on a, par exemple la différentielle $\frac{z^3 dz}{zz+2qz+p}$, on trouvera par la diviſion $\frac{z^3 dz}{zz+2qz+p} = z\,dz - 2q\,dz + \frac{4qqz\,dz - pz\,dz + 2qp\,dz}{zz+2qz+p}$; différentielle qu'on pourra intégrer par parties.

EXEMPLE IV. Soit l'ordonnée $y = x^{\frac{m\sigma}{2}-1} (a + b x^\sigma + c x^{2\sigma})^{-1}$, m etant un nombre impair & poſitif. En ſuppoſant $x^\sigma = z^\nu$, on trouve la différentielle $y\,dx = \frac{\nu}{\sigma} z^{\frac{m\nu}{2}-1} dz (a + b z^\nu + c z^{2\nu})^{-1} = \frac{2}{\sigma} z^{m-1} dz (a + b z^2 + c z^4)^{-1}$, en faiſant $\nu = 2$. En retranchant de l'expoſant $m-1$, l'expoſant ν ou 2, autant de fois qu'il faut, pour qu'il ne reſte rien, on reduit cette

différentielle a $\frac{2}{\sigma} dz\,(a + bz^2 + cz^4)^{-1}$, qui eſt la plus ſimple. Or nous avons trouvé (LXIX.) par les quadratures des ſections coniques les deux intégrales $S.\,dz \times (a + bz^2 + cz^4)^{-1}$, & $S.\,z^2 dz\,(a + bz^2 + cz^4)^{-1}$, au moyen deſquelles on peut (par le Theor. V.) remonter ſucceſſivement aux intégrales $S.\,z^4 dz\,(a + bz^2 + cz^4)^{-1}$, $S.\,z^6 dz\,(a + bz^2 + cz^4)^{-1}$, $S.\,z^8 dz \times (a + bz^2 + cz^4)^{-1}$, &c. & parvenir a l'intégrale $S.\,z^{m-1} dz\,(a + bz^2 + cz^4)^{-1}$, qu'il faudra multiplier par 2σ, pour avoir l'intégrale cherchée. Car en ſuppoſant $R = e + fz^n + gz^{2n} = a + bz^2 + cz^4$, $e = a$, $f = b$, $g = c$, $n = 2$, $z^{\theta - 1} R^{\lambda - 1} dz = z^0 dz\,(a + bz^2 + cz^4)^{-1}$, $\theta - 1 = 0$, $\theta = 1$, $\lambda - 1 = -1$, $\lambda = 0$, $r = \frac{\theta}{n} = \frac{1}{2}$, $s = r + \lambda = \frac{1}{2}$, $t = s + \lambda = \frac{1}{2}$; & enſuite $S.\,z^{\theta - 1} R^{\lambda - 1} dz = S.\,dz\,(a + bz^2 + cz^4)^{-1} = A$; $S.\,z^{\theta + n - 1} R^{\lambda - 1} dz = S.\,z^2 dz\,(a + bz^2 + cz^4)^{-1} = B$, & $S.\,z^{\theta + 2n - 1} dz\,R^{\lambda - 1} = S.\,z^4 dz \times (a + bz^2 + cz^4)^{-1} = C$; on aura (Art. CCXIII.) l'equation $\frac{1}{n} z^\theta R^\lambda = reA + sfB + tgC$, ou $\frac{1}{2} z = \frac{1}{2} aA + \frac{1}{2} bB$

$\frac{1}{2}bB + \frac{1}{2}cC$; d'ou l'on tire l'intégrale $C = \frac{z - aA - bB}{c}$. On la trouve plus brievement en divisant le numerateur de la différentielle $\frac{z^4 dz}{cz^4 + bz^2 + a}$ par son denominateur, ou en la reduisant au quotient $\frac{1}{c}dz - \frac{\frac{b}{c}z^2 dz}{cz^4 + bz^2 + a} - \frac{\frac{a}{c}dz}{cz^4 + bz^2 + a}$, dont l'integrale est $\frac{1}{c}z - \frac{b}{c}S.z^2 dz(a + bz^2 + cz^4)^{-1} - \frac{a}{c}S.dz(a + bz^2 + cz^4)^{-1}$, la même que C.

EXEMPLE V. Soit $y = x^{m\sigma - 1}(a + bx^\sigma + cx^{2\sigma})^{\frac{1}{2}}$, m etant un nombre entier positif, ou zero. En supposant $x^\sigma = z$, on trouve $ydx = \frac{1}{\sigma}z^{m-1}dz(a + bz + cz^2)^{\frac{1}{2}}$, qu'on reduit a la différentielle la plus simple $\frac{1}{\sigma}dz(a + bz + cz^2)^{\frac{1}{2}}$, dont on a l'intégrale par les quadratures des sections coniques (Art. LXIX.). Mais comme l'ordonneé y est un trinome, on a besoin d'une autre intégrale convenable, pour trouver celle de la différentielle proposée par le Theor. V. On peut prendre $S.zdz(a + bz + cz^2)^{\frac{1}{2}}$, que nous avons trouvé

par les quadratures des sections coniques, & au moyen de ces deux intégrales $S.\,dz\,(a+bz+cz^2)^{\frac{1}{2}}$, & $S.\,z\,dz(a+bz+cz^2)^{\frac{1}{2}}$ regardées comme données. On trouvera par le Theor. V. successivement toutes les autres intégrales $S.\,z^2dz(a+bz+cz^2)^{\frac{1}{2}}$, $S.\,z^3dz(a+bz+cz^2)^{\frac{1}{2}}$, &c., & $S.\,z^{-1}dz\,(a+bz+cz^2)^{\frac{1}{2}}$, $S.\,z^{-2}\,dz(a+bz+cz^2)^{\frac{1}{2}}$, &c.. On pourroit aussi supposer $z=u^{-1}$; ce qui donneroit $dz\,(a+bz+cz^2)^{\frac{1}{2}}=-u^{-3}\,du(\,au^2+bu+c)^{\frac{1}{2}}$, dont l'intégrale se trouve par les quadratures des sections coniques, en faisant $u=z^{-1}$, & par ce qu'on a aussi l'intégrale $S.\;du\,(au^2+bu+c)^{\frac{1}{2}}$ par les mêmes quadratures, on pourroit, au moyen de ces deux intégrales données trouver successivement toutes les autres $S.\,u^{-1}\,du(\,au^2+bu+c)^{\frac{1}{2}}$, $S.\,u^{-2}\,du\,(au^2+bu+c)^{\frac{1}{2}}$, $S.\;u^{-4}\,du\times(\,au^2+bu+c)^{\frac{1}{2}}$, &c., qui donneroient l'intégrale de la différentielle proposée dans tous les cas, en remettant z au lieu de u^{-1}.

CCXLIX.

Les exemples precedents dependent de la comparaiſon des aires; il ſera a propos de rappeller icy le Theoreme general pour les courbes trinomes, & d'en tirer quelques conſequences: ſoit $\frac{x^\theta}{R^\lambda}$, ou $x^\theta R^{-\lambda}$ l'aire d'une courbe, & ſoit $R = e + fx^n + gx^{2n}$; nous avons demontré que l'ordonnée de cette courbe eſt $=$

$$\frac{\theta e x^{\theta-1} + \overline{\theta-\lambda n}.fx^{\theta+n-1} + \overline{\theta-2\lambda n}.gx^{\theta+2n-1}}{R^{\lambda+1}}$$

ſi l'ordonnée eſt compoſée de differentes parties, on pourra regarder chaque partie comme les ordonnées d'autant de courbes; d'ou il ſuit que ſi A eſt l'aire d'une courbe, dont l'ordonnée eſt $\frac{x^{\theta-1}}{R^{\lambda+1}}$; B l'aire d'une courbe, dont l'ordonnée eſt $\frac{x^{\theta+n-1}}{R^{\lambda+1}}$; C l'aire d'une courbe, dont l'ordonnée eſt $\frac{x^{\theta+2n-1}}{R^{\lambda+1}}$, on aura $\theta e A + \overline{\theta-\lambda n}.fB + \overline{\theta-2\lambda n}.gC = x^\theta R^{-\lambda}$, & par la même raiſon, ſi D eſt l'aire d'une courbe, dont l'ordonnée eſt $\frac{x^{\theta+3n-1}}{R^{\lambda+1}}$, on aura $\overline{\theta+n}.eB + \overline{\theta+n-\lambda n}.fC + \overline{\theta+n-2\lambda n}.gD = \frac{x^{\theta+n}}{R^\lambda}$ ſuppoſons maintenant F

l'aire d'une courbe, dont l'ordonnée $\frac{x^{\theta-1}}{R^{\lambda}}$, & G l'aire d'une courbe, dont l'ordonnée $\frac{x^{\theta+n-1}}{R^{\lambda}}$ en substituant $e+fx^{n}+gx^{2n}$ a la place de R, & multipliant par $\frac{x^{\theta-1}}{R^{\lambda+1}}$, on aura $\frac{ex^{\theta-1}+fx^{\theta+n-1}+gx^{\theta+2n-1}}{R^{\lambda+1}}=\frac{x^{\theta-1}}{R^{\lambda}}$, & $\frac{ex^{\theta+n-1}+fx^{\theta+2n-1}+gx^{\theta+3n-1}}{R^{\lambda+1}}=\frac{x^{\theta+n-1}}{R^{\lambda}}$, & par consequent $eA+fB+gC=F$, & $eB+fC+gD=G$; ce qui fournit quatre equations, par lesquelles on pourra determiner les rapports des six aires A, B, C, D, F, G, & en faisant disparoître par le moyen de ces quatre equations trois des aires, on aura le rapport des trois autres, ainsi aprés avoir fait disparoître par le moyen des equations precedentes les aires B, C, D, on trouvera $A=$

$$\frac{(\overline{\theta+\lambda n}.ff+2\overline{\theta-4\lambda n}.eg)F+\overline{\theta-n+2\lambda n}.fgG-(ff-2eg)x^{\theta}R^{-\lambda}-fg.x^{\theta+n}R^{-\lambda}}{n\lambda e.(4eg-ff)}$$

comme il est demontré (Art. CCXVI.).

Or il est aisé de voir que la courbe est quarrable si $\overline{\theta+\lambda n}.ff=\overline{4\lambda n-2\theta}.eg$, & en même tems $n-2\lambda n=\theta$, comme nous l'avons deja fait voir d'une autre façon. Mais s'il n'arrive ny l'un ny l'autre, ou l'un des deux seulement, la quadrature de la courbe,

dont l'ordonnée eſt $\frac{x^{\theta-1}}{R^{\lambda+1}}$ dependra de la quadrature de deux courbes, dont les ordonnées ſont $\frac{x^{\theta-1}}{R^{\lambda}}$, & $\frac{x^{\theta+n-1}}{R^{\lambda}}$, ou de l'une des deux ſeulement. Mais l'aire d'une courbe, dont l'ordonnée $\frac{x^{\theta-1}}{R^{\lambda}}$ depend des aires de deux courbes, dont les ordonnées ſont $\frac{x^{\theta-1}}{R^{\lambda-1}}$, & $\frac{x^{\theta+n-1}}{R^{\lambda-1}}$; de plus la quadrature de la courbe, dont l'ordonnée eſt $\frac{x^{\theta+n-1}}{R^{\lambda}}$, depend des aires des deux courbes, dont les ordonnées ſont $\frac{x^{\theta+n-1}}{R^{\lambda-1}}$, & $\frac{x^{\theta+2n-1}}{R^{\lambda-1}}$; donc on a reduit la quadrature de la courbe propoſée, a la quadrature des trois courbes, & par conſequent elle ſera quarrable, ſi chacune d'elles peut être quarrée. Mais s'il arrive qu'aucune ne ſoit quarrable, ou une d'elles ſeulement, alors la quadrature de chaque courbe reſtante dependra de la quadrature des deux courbes, dont les ordonnées ſeront affectées du denominateur $R^{\lambda-2}$, & en diminuant les expoſans, on reduira enfin la quadrature propoſée aux quadratures les plus ſimples. Ainſi la courbe, dont l'ordonnée eſt $\frac{x^{\theta-1}}{(e+fx^{n}+gx^{2n})^{\lambda+1}}$, λ etant un nombre entier, pourra toujours être quarrée exactement, ou ſa quadrature ne dependra que des

ſections coniques, l'expoſant du denominateur etant reduit a l'unité, ce que nous avons deja demontré autrement.

S'il arrive que dans l'expreſſion de l'aire *A*, on ait $4eg - ff = o$, il eſt clair que l'aire *A* diſparoitroit de l'equation precedente, & la courbe dont l'ordonnée eſt $\frac{x^{\theta-1}}{(e+fx^n+gx^{2n})^{\lambda+1}}$ ſe reduiroit a un binome, puiſque l'ordonnée precedente deviendroit $\frac{(4e)^{\lambda+1}x^{\theta-1}}{(2e+fx^n)^{2\lambda+2}}$; car en ſubſtituant a la place de g ſa valeur $\frac{ff}{4e}$, on auroit $\frac{x^{\theta-1}}{(e+fx^n+gx^{2n})^{\lambda+1}} =$

$$\frac{x^{\theta-1}}{(e+fx^n+\frac{ff}{4e}x^{2n})^{\lambda+1}} = \frac{(4e)^{\lambda+1}x^{\theta-1}}{(4e^2+4efx^n+ffx^{2n})^{\lambda+1}} =$$

$\frac{(4e)^{\lambda+1}x^{\theta-1}}{(2e+fx^n)^{2\lambda+2}}$; mais l'aire d'une courbe qui auroit cette ordonnée depend de la quadrature d'une courbe, dont l'ordonnée eſt $\frac{x^{\theta-1}}{2e+fx^n}$, comme il eſt evident par les reductions precedentes; donc le cas propoſé deviendroit plus ſimple dans cette ſuppoſition, & la demonſtration donnée par M.r Newton ſubſiſte dans ce cas qui n'en devient que plus facile.

CCL.

PROBLEME III. Trouver l'intégrale de la différen-

tielle quadrinome $x^{\tau} dx(a+bx^{\sigma}+cx^{2\sigma}+d'x^{3\sigma})^{\pi}$, ou la reduire aux quadratures des courbes les plus ſimples.

SOLUTION. On reſoudra ce Probleme, & tous les autres du même genre comme les deux precedents. Dans celui-cy on aura l'ordonnée $y = x^{\tau}(a+bx^{\sigma}+cx^{2\sigma}+d'x^{3\sigma})^{\pi} = x^{\tau+3\sigma\pi}(d'+cx^{-\sigma}+bx^{-2\sigma}+ax^{-3\sigma})^{\pi}$; on la comparera ſous ces deux formes avec l'ordonnée $x^{\theta-1}(e+fx^{n}+gx^{2n}+hx^{3n})^{\lambda-1}$, qu'on trouve en faiſant evanouïr les coefficients de tous les termes aprés le quatrieme, du polynome R, & en ſuppoſant $a=1$, $b=o$, $c=o$, &c. dans l'ordonnée generale $x^{\theta-1}R^{\lambda-1}(a+bx^{n}+cx^{2n}+\&c.)$ du Theor. III., ce qui donnera l'aire $S.y\,dx = x^{\theta}R^{\lambda}\left(\frac{\frac{1}{n}}{re} - \frac{sfA}{\overline{r+1}\cdot e}x^{n} - \left(\frac{(s+1)fB+tgA}{\overline{r+2}\cdot e}\right)x^{2n} - \left(\frac{(s+2)fC+(t+1)gB+uhA}{\overline{r+3}\cdot e}\right)x^{3n} - \&c.\right)$; & dans cette ſuite on aura $r=\frac{\theta}{n}$, $s=r+\lambda$, $t=s+\lambda$, $u=t+\lambda$, &c., $A=\frac{\frac{1}{n}}{re}$, $B=-\frac{sfA}{\overline{r+1}\cdot e}$, $C=-\left(\frac{(s+1)fB+tgA}{\overline{r+2}\cdot e}\right)$, $D=-\left(\frac{(s+2)fC+(t+1)gB+uhA}{\overline{r+3}\cdot e}\right)$, &c. On comparera l'ordonnée y ſous la forme $x^{\tau}(a+$

$bx^{r}+cx^{2r}+d'x^{3r})^{\pi}$ avec l'ordonnée $x^{\theta-1}(e+fx^{n}$ $+gx^{2n}+bx^{3n})^{\lambda-1}$, & on determinera les valeurs des lettres e, f, g, b, θ, λ, n, r, s, t, u, A, B, C, D, *&c.*, qu'on ſubſtituera dans l'expreſſion de l'aire $S.ydx$. Si la ſuite de cette aire ſe trouve finie, on aura l'intégrale algebrique de la différentielle propoſée. Si elle eſt infinie, il faudra comparer l'ordonnée y ſous l'autre forme $x^{\gamma+3r\pi}(d'+cx^{-r}+bx^{-2r}+ax^{-3r})^{\pi}$ avec la même ordonnée $x^{\theta-1}(e+fx^{n}+gx^{2n}+$ $bx^{3n})^{\lambda-1}$, determiner les valeurs des lettres e, f, g, b, θ, λ, n, r, s, t, u, A, B, C, D, *&c.*, & les ſubſtituer dans l'expreſſion de l'aire $S.ydx$. Si la ſuite de cette aire eſt finie, on aura l'intégrale cherchée. Mais ſi les deux ſuites de l'aire $S.ydx$ ſont infinies, on reduira la différentielle de l'aire propoſée a celles des aires des courbes les plus ſimples, comme on a fait dans les deux premiers Problemes, ayant cependant egard a ce qui eſt propre aux différentielles quadrinomes. Au reſte lorſque les deux ſuites de l'aire $S.ydx$ ſont infinies, on peut, en ſe ſervant de celle qui converge, approcher tant qu'on voudra de la veritable ſomme de cette ſuite, & par conſequent de l'intégrale cherchée.

CCLI.

CCLI.

PROBLEME IV. Trouver l'intégrale de la différentielle $y\,dx = x^{pn-1}dx\,(e+fx^n)^{\lambda-1}\,(k+lx^n)^{\mu-1}$, p etant un nombre entier positif.

SOLUTION. On pourroit resoudre ce Probleme par les formules du Theor. IV. en supposant dans ces formules $R = e+fx^n$, $S = k+lx^n$, $\theta - 1 = pn - 1$, $a = 1$, $b = o$, $c = o$, &c.; mais on rendra la solution plus simple, en supposant $x^n = z$ dans la différentielle proposée, ce qui donne $y\,dx = \frac{1}{n}z^{p-1}\,dz\,(e+fz)^{\lambda-1} \times$

$$(k+lz)^{\mu-1} = \frac{\frac{1}{n}u^{\lambda-1}\,du\,(u-e)^{p-1}(kf-le+lu)^{\mu-1}}{f^{p+\mu-1}},$$

en faisant de plus $e+fz = u$, ou $z = \frac{u-e}{f}$; donc, lorsque $p = 1$, on aura $y\,dx = \frac{\frac{1}{n}u^{\lambda-1}\,du\,(kf-le+lu)^{\mu-1}}{f^{\mu}}$; différentielle binome, qu'on pourra intégrer par le Probleme I.; & lorsque $p > 1$, en developpant la puissance entiere $p-1$ du binome $u-e$, on aura pour $y\,dx$ une suite de termes de la forme $\frac{\frac{1}{n}u^{\lambda-1+q}\,du\,(kf+le+lu)^{\mu-1}}{f^{p+\mu-1}}$, dont chacun pourra aussi être intégré separément par le Probleme I.

EXEMPLE I. Soient $p = 1$, $\lambda - 1 = \frac{1}{2}$, & $\mu - 1 = -1$, ou $\mu = o$, on aura $y\,dx = \frac{1}{n} u^{\frac{1}{2}} du (kf - le + lu)^{-1} = \frac{2}{nl} \cdot \frac{t^2 dt}{t^2 + q}$, en supposant $u = t^2$, & $\frac{kf}{l} - e = q$. Or $\frac{t^2 dt}{t^2 + q} = dt - \frac{q\,dt}{t^2 + q}$; par consequent $S.\frac{t^2 dt}{t^2 + q} = t - S.\frac{q\,dt}{t^2 + q}$, & l'intégrale $S.\frac{q\,dt}{t^2 + q}$ est un arc de cercle, dont le rayon est $\sqrt{q}$, & la tangente t, lorsque q est positif; & elle se trouve par les logarithmes, ou par la quadrature de l'hyperbole, lorsque q est negatif, comme nous l'avons deja vû; on aura donc l'intégrale cherchée en partie algebriquement, en partie par la quadrature du cercle, ou par celle de l'hyperbole.

EXEMPLE II. Soient $p = 1$, $\lambda - 1 = -\frac{3}{2}$, & $\mu - 1 = -1$, ou $\mu = o$, on aura $y\,dx = \frac{1}{n} u^{-\frac{3}{2}} \times du (kf - le + lu)^{-1} = \frac{2}{nl} \cdot \frac{t^{-2} dt}{t^2 + q}$, en faisant les mêmes suppositions, que dans l'exemple precedent. Or on trouve par le Probl. I. $S.\frac{t^{-2} dt}{t^2 + q} = \frac{-\frac{1}{q}}{t} - S.\frac{\frac{1}{q}\,dt}{t^2 + q}$,

comme on peut le verifier en différentiant de part & d'autre, & nous avons trouvé dans l'Ex. I. l'intégrale $S. \frac{dt}{t^2+q}$.

EXEMPLE III. Soient $p=1$, $\lambda-1=\frac{1}{2}$, $\mu-1=-\frac{1}{2}$, $\lambda=\frac{3}{2}$, $\mu=\frac{1}{2}$, on aura $y\,dx=$

$$\frac{\frac{1}{n}u^{\frac{1}{2}}du(kf-le+lu)^{-\frac{1}{2}}}{f^{\frac{1}{2}}}=\frac{2}{n\sqrt{fl}}\,\frac{t^2dt}{t^2+q},$$

en supposant $u=t^2$, & $\frac{kf}{l}-e=q$; on a deja trouvé l'intégrale de cette différentielle dans l'Exem. I. Ces trois exemples sont pris des formes 9.e, 10.e, & 11.e de la seconde Table du Traité des quadratures de Newton.

CCLII.

COROLLAIRE. Si la différentielle $y\,dx=x^{pn-1}\times dx(e+fx^n)^{\lambda-1}(k+lx^n+mx^n+\&c.)^{\mu-1}$, en supposant $x^n=z$, on aura $y\,dx=\frac{1}{n}z^{p-1}dz(e+fz)^{\lambda-1}(k+lz+mz^2+\&c.)^{\mu-1}=\frac{1}{n}\times$

$$\frac{u^{\lambda-1}du(u-e)^{p-1}}{f^p}\left(k+l.\frac{u-e}{f}+m.\frac{(u-e)^2}{f^2}+\&c.\right)^{\mu-1},$$

en faiſant de plus $z = \frac{u - e}{f}$, par ou l'on voit, que p etant un nombre entier & poſitif, on pourra trouver l'intégrale de la différentielle $y\,dx$ par le Probleme I., lorſque le polynome $(k + l x^n + m x^{2n} + \&c.)^{\mu - 1}$ ſera un binome, par le Probleme II., lorſque ce ſera un trinome, par le Probleme III., lorſqu'il ſera un quadrinome, &c.

CCLIII.

PROBLEME V. Trouver l'intégrale de la différentielle $y\,dx = x^{\theta - 1} dx (e + f x^n)^{\lambda - 1} (k + l x^n + m x^{2n} + \&c.)^{\mu - 1}$, les expoſans etant des nombres quelconques, ou zero.

SOLUTION. En ſuppoſant $x^n = z$, on aura $y\,dx = \frac{1}{n} z^{\frac{\theta}{n} - 1} dz (e + f z)^{\lambda - 1} (k + l z + m z^2 + \&c.)^{\mu - 1}$. On reſoudra donc ce Probleme, comme dans le Corollaire precedent, lorſque $\frac{\theta}{n}$ ſera un nombre entier, & poſitif $= p$, on le reſoudra comme le Probleme III., & les autres du même genre, lorſque l'expoſant $\lambda - 1$ ſera un nombre entier poſitif, ou zero, quelques ſoient les autres expoſans. Enfin on pourra le reſoudre généralement par les formules du Theoreme IV. en faiſant

dans ces formules $R = e + fx^n$, $S = k + lx^n + mx^{2n}$ $+ \&c.$, $a = 1$, $b = o = c$, &c., d'ou l'on aura $S.ydx =$

$$x^\theta R^\lambda S^\mu \left\{ \left. \begin{array}{l} \frac{\frac{1}{n}}{rek} - sfk.A \\ \frac{-s'el.A}{\overline{r+1}.ek} \end{array} \right\} x^n \left. \begin{array}{l} -(s+1)fkB \\ -(s'+1)elB \\ -tgk.A \\ -t'fl.A \\ \frac{-t''em.A}{\overline{r+2}.ek} \end{array} \right\} x^{2n} \quad - \&c. \right\}$$

CCLIV.

REMARQUE. Nous ne pafferons pas plus loin ces fortes de Problemes; ce que nous en avons donné fuffit pour bien faire comprendre l'ufage des methodes de Newton. Il nous refte feulement a obferver, & a demontrer un principe general qui peut fervir de reffource en plufieurs occafions a ceux qui fe font préparés au calcul intégral par l'étude de la Theorie des fuites; cette theorie, que nous fuppofons connüe d'ailleurs nous meneroit trop loin, & n'entre point dans le plan de nôtre Ouvrage.

Lorfque l'equation, qui exprime le rapport de deux variables y, x, n'eft point affectée, ou qu'elle peut fe reduire a une equation non affectée, on peut

toujours trouver l'intégrale de la différentielle ydx par une suite finie, ou infinie. Car dans la supposition, la variable y sera une fonction algebrique de x, ou x une fonction algebrique de y; or on sçait que par les operations d'Algebre, surtout par la division continuée, & l'extraction des racines, a l'aide du binome de Newton, on peut toujours reduire y, ou la fonction algebrique de x a une suite finie, ou infinie de la forme $A + Bx^{\lambda} + Cx^{\mu} + Dx^{\nu} +$ &c., dans laquelle A, B, C, D, &c. sont des constantes, ou zero, λ, μ, ν, &c. des exposans quelconques entiers, ou rompûs, positifs, ou negatifs: on aura donc dans ce Cas $ydx = Adx + Bx^{\lambda}dx + Cx^{\mu}dx + Dx^{\nu}dx$ &c., & l'intégrale $S.ydx = Ax + \frac{Bx^{\lambda+1}}{\lambda+1} + \frac{Cx^{\mu+1}}{\mu+1} + \frac{Dx^{\nu+1}}{\nu+1}$ + &c., en remarquant que s'il y a quelque terme, où l'exposant de x soit -1, il faudra intégrer ce terme par les logarithmes. On voit de même, que x etant une fonction algebrique de y, on pourra toujours trouver une equation de la forme $x = F + Gy^{\pi} + Hy^{\tau} + Ky^{\rho} +$ &c., d'ou l'on tire, en différentiant, $dx = \pi Gy^{\pi-1}dy + \tau Hy^{\tau-1}dy + \rho Ky^{\rho-1}dy +$ &c., & $S.\ ydx = \frac{\pi Gy^{\pi+1}}{\pi+1} + \frac{\tau Hy^{\tau+1}}{\tau+1} + \frac{\rho Ky^{\rho+1}}{\rho+1}$ &c. *C. Q. F. D.*

On peut aussi trouver par les suites finies, ou infinies l'intégrale de la différentielle $y\,dx$, lorsque y est une fonction de x, avec des intégrales en x exprimées par des suites finies, ou infinies. Car il est evident que, dans cette supposition, la variable y pourra toujours être exprimée par une suite finie, ou infinie de la forme $A + Bx^{\lambda} + Cx^{\mu} + Dx^{\nu} + \&c.$, & par consequent la différentielle pourra être intégrée comme cy-devant.



CHAPITRE VII.

De l'intégration de la différentielle $\sqrt{dz^2+du^2}$, *dans laquelle l'une des deux variables est une fonction algebrique de l'autre.*

CCLV.

On sçait que $\sqrt{dz^2+du^2}$ est l'element ou la différentielle de l'arc d'une courbe, dont les coordonnées perpendiculaires sont z, & u; de sorte que, si on designe cet arc par s, on aura $ds = \sqrt{dz^2+du^2}$, & $s = S.\sqrt{dz^2+du^2}$, en ajoutant, s'il est necessaire, la constante positive ou negative qu'on determinera par la regle, que nous avons expliquée (Art. XIV.).

CCLVI.

Theoreme I. La différentielle $\sqrt{dz^2+du^2}$ peut toujours être transformée en une autre différentielle de la forme ydx, dans laquelle y sera une fonction algebrique de x.

Demonstration. Soit $u = Z$ fonction algebrique de z, on aura, en différentiant, $du = dZ = Zdz$,

$Z'dz$, Z' etant encore une fonction algebrique de z; d'ou l'on tire $du^2 = Z'^2 dz^2$, & $\sqrt{dz^2 + du^2} = dz\sqrt{1 + Z'^2} = y\,dx$, en supposant $x = z$, & $y = \sqrt{1 + Z'^2}$. Or puisque Z est une fonction algebrique de z, ou de x, la quantité $\sqrt{1 + Z'^2}$, ou y sera encore une fonction algebrique de x; donc &c. *C. Q. F. D.*

CCLVII.

COROLLAIRE I. Les rectifications des courbes se reduisent par ce Theoreme aux quadratures d'autres courbes, & lorsqu'on aura transformé la différentielle $\sqrt{dz^2 + du^2}$ en $y\,dx$, on pourra se servir de toutes les methodes, que nous avons donné, pour intégrer la différentielle $y\,dx$, & en appliquer le resultat a la différentielle $\sqrt{dz^2 + du^2} = y\,dx$. Ainsi, lorsque la transformée $y\,dx$ pourra se reduire a une différentielle rationelle, on pourra trouver l'intégrale $S. \sqrt{dz^2 + du^2}$ algebriquement, ou par les Tables des logarithmes, & des sinus, ou, ce qui revient au même, par les quadratures des sections coniques; lorsque la transformée pourra s'intégrer par des formules quelconques, ou se reduire aux quadratures des courbes les plus simples,

on pourra aussi intégrer, ou reduire de la même maniere la proposée $\sqrt{dz^2 + du^2}$.

CCLVIII.

COROLLAIRE II. Puisque la différentielle $\sqrt{dz^2 + du^2}$ peut toujours se reduire à la différentielle $dz\sqrt{1 + Z'^2}$, dans laquelle Z' est une fonction algebrique de z, ou a la différentielle $du\sqrt{1 + V'^2}$, dans laquelle V' est une fonction algebrique de u, on pourra dans un grand nombre de cas faire usage de nôtre Table de reduction pour trouver l'intégrale $S.\sqrt{dz^2 + du^2}$, les formules de cette Table ayant beaucoup de rapport avec les différentielles de la forme $dz\sqrt{1 + Z'^2}$.

EXEMPLE. Soit $x^n = ay^{n-1}$ l'equation a la parabole de tous les genres, dans laquelle n est un nombre entier positif; on aura, en différentiant $nx^{n-1} \times dx = \overline{n-1}.ay^{n-2}dy$; d'ou l'on tire $dy = \frac{nx^{n-1}dx}{\overline{n-1}.ay^{n-2}}$ $= \frac{nx^{\frac{1}{n-1}}}{\overline{n-1}.a^{\frac{1}{n-1}}}$, en substituant a la place de y^{n-2} sa valeur $\frac{x^{\frac{nn-2n}{n-1}}}{a^{\frac{n-2}{n-1}}}$; donc $dy^2 = \frac{n^2x^{\frac{2}{n-1}}dx^2}{\overline{n^2-2n+1}.a^{\frac{2}{n-1}}}$, & par con-

fequent $\sqrt{dx^2 + dy^2} = dx \sqrt{1 + \frac{n^2 x^{\frac{2}{n-1}}}{\overline{n^2 - 2n + 1} \cdot a^{\frac{2}{n-1}}}}$; d'où l'on voit que cette expreffion fe reduit a l'aire d'une courbe, dont l'abfciffe eft x, & l'ordonnée perpendiculaire $\sqrt{1 + \frac{n^2 x^{\frac{2}{n-1}}}{\overline{n^2 - 2n + 1} \cdot a^{\frac{2}{n-1}}}}$, & par confequent fi la valeur de n eft telle, que l'ordonnée appartienne a une courbe quarrable, cette courbe fera auffi rectifiable; autrement elle ne le fera que par approximation, & on pourra la comparer avec les courbes les plus fimples.

Soit $n = 3$, l'equation fera $x^3 = ay^2$, qui eft une parabole du fecond genre, & la différentielle de l'arc devient $dx \sqrt{1 + \frac{9x}{4a}}$, que l'on voit être quarrable, & qui fe reduit a la forme troifieme de la premiere Table de Newton $d'z^{n-1} \sqrt{e + fz^n} = y$, en faifant $n = 1$, $d' = 1$, $e = 1$, $f = \frac{9}{4a}$, & l'intégrale eft $\frac{8a}{27} \left(1 + \frac{9x}{4a}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{8a + 18x}{27} \sqrt{1 + \frac{9x}{4a}}$. On trouveroit de la même maniere l'intégrale de la différentielle precedente & par confequent les rectifications des parabo-

les, toutes les fois que n eſt un nombre poſitif impair plus grand que 3., comme 5., 7., 9., &c.

Si on ſuppoſe dans la forme precedente $n=4$, l'equation devient $x^4=ay^3$, & la différentielle de l'arc $=dx\sqrt{1+\frac{16x^{\frac{2}{3}}}{9a^{\frac{2}{3}}}}$; en comparant cette expreſſion, comme nous avons fait dans le Chapitre precedent, on voit qu'elle n'eſt pas intégrable, mais qu'elle appartient a la troiſieme forme de la ſeconde Table de Newton $\frac{d'}{z^{2n+1}}\sqrt{e+fz^n}$, en faiſant $n=-\frac{2}{3}$, $d'=1$, $e=\frac{16}{9a^{\frac{2}{3}}}$, $f=1$, & cette intégrale depend de l'hyperbole.

De même ſoit la parabole ordinaire $ax=y^2$, on aura, en reduiſant, la différentielle de l'arc $=dx\times\frac{1}{2}\sqrt{4+ax^{-1}}$, qu'on voit par les methodes precedentes ne pas être quarrable; mais elle ſe reduit a la troiſieme forme de la ſeconde Table de Newton, ſçavoir a l'expreſſion $\frac{d'}{z^{n+1}}\sqrt{e+fz^n}$, en faiſant $n=-1$ *&c.*, qui depend de l'hyperbole, comme la precedente. Il eſt evident qu'on peut ſubſtituer indifféremment dans la différentielle de l'arc l'expreſſion dy^2, ou dx^2; ainſi

dans l'Exemple precedent $ax = y^2$, on aura $\frac{2ydy}{a} = dx$, & $dx^2 = \frac{4y^2dy^2}{a^2}$; la différentielle de l'arc devient $\sqrt{\frac{4y^2dy^2}{a^2} + dy^2} = dy\sqrt{1 + \frac{4y^2}{a^2}} = ydy\sqrt{\frac{4}{a^2} + y^{-2}}$, qui appartient a la forme $\frac{dz}{z^{n+1}}\sqrt{e + fz^n} = y$, en faisant $n = -2$, &c., qui se reduit a l'hyperbole.

CCLIX.

COROLLAIRE III. Il est clair qu'on peut trouver par la même methode une infinité de courbes rectifiables a volonté, ou comparables avec des aires de courbes données; soit, par exemple, proposée de trouver la courbe, dans laquelle $S.\sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$, on aura, en différentiant, $\sqrt{dx^2 + dy^2} = x^{\frac{1}{2}}dx$, &, en elevant au quarré, $dx^2 + dy^2 = xdx^2$, d'ou l'on tire $(x - 1)dx^2 = dy^2$, & $dx\sqrt{x - 1} = dy$; par consequent l'aire d'une courbe, dont l'abscisse est x, & l'ordonnée $\sqrt{x - 1}$, en divisant cette aire par une quantité constante donnera la valeur de y ordonnée de la courbe cherchée. On trouvera cette courbe en comparant l'expression $\sqrt{x - 1}$ avec la troisieme forme de

la premiere Table de Newton, par laquelle on aura $y=\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}$, equation a la courbe, comme on voit d'ailleurs du premier coup d'œil en intégrant. Cet exemple eſt très ſimple, & nous ne l'avons mis, que pour eclaircir une methode, dont nous ferons uſage dans la ſuite.

CCLX.

LEMME I. Trouver la différentielle de l'arc de l'hyperbole.

I.° L'equation a l'hyperbole entre les aſymptotes perpendiculaires eſt $zu=q$, en prenant l'abſciſſe z depuis le centre ſur une aſymptote, u pour l'ordonnée correſpondante, & q pour une quantité conſtante; on aura donc $u=qz^{-1}$, $du=-qz^{-2}dz$, $du^2=\frac{q^2dz^2}{z^4}$, & $\sqrt{dz^2+du^2}=\frac{dz}{zz}\sqrt{z^4+qq}=\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}\times dx\sqrt{x^2+qq}$, en faiſant $z^2=x$, ou $z=x^{\frac{1}{2}}$.

II.° L'equation a l'hyperbole eſt $uu=\frac{bb}{aa}(zz-aa)$, les deux axes etant $2a$, & $2b$, en prenant l'abſciſſe z depuis le centre ſur le premier axe $2a$, & u pour l'ordonnée correſpondante; donc, en ſuppoſant $\frac{bb}{aa}=q$, on aura $uu=q(zz-aa)$, $udu=qzdz$,

$u^2 du^2 = q^2 z^2 dz^2$, $du^2 = \frac{q z^2 dz^2}{zz - aa}$, & $\sqrt{dz^2 + du^2} = dz \frac{\sqrt{(q+1)z^2 - aa}}{\sqrt{zz - aa}}$. En ſuppoſant $(q+1)zz - aa = ax$, ou $zz = \frac{ax + aa}{q+1}$, on trouve $2z dz = \frac{a dx}{q+1}$, $dz = \frac{a dx}{(q+1) 2z} = \frac{a dx}{\sqrt{q+1} . 2\sqrt{ax + aa}}$, & $\frac{dz \sqrt{q+1 . z^2 - aa}}{\sqrt{zz - aa}} = \frac{1 \; dx \sqrt{ax}}{2\sqrt{x + a} . \sqrt{x - qa}} = \frac{dx \sqrt{ax}}{2\sqrt{xx + ax(1-q) - qaa}} = \frac{dx \sqrt{ax}}{2\sqrt{xx + x\left(\frac{aa - bb}{a}\right) - bb}} = \sqrt{dz^2 + du^2}$, & par conſequent, lorſque les deux axes $2a$, & $2b$ ſeront egaux, l'expreſſion precedente ſe changera en $\frac{dx \sqrt{bx}}{2\sqrt{xx - bb}}$, différentielle de l'arc d'une hyperbole equilatere.

Lorſque a ſera plus grand que b, la quantité $\frac{aa - bb}{a}$ ſera poſitive, & elle ſera negative, lorſque a ſera plus petit que b. Dans le premier cas on aura $\sqrt{dz^2 + du^2} = \frac{dx \sqrt{ax}}{2\sqrt{xx + px - bb}}$, dans le ſecond cas $\sqrt{dz^2 + du^2} = \frac{dx \sqrt{ax}}{2\sqrt{xx - px - bb}}$.

Si on prend l'abſciſſe z ſur le ſecond axe $2b$, le premier axe etant toujours $2a$, & l'ordonnée au ſecond axe etant u, l'equation à l'hyperbole ſera $uu =$

$\frac{aa}{bb}(zz+bb)=q(zz+bb)$, en faisant $\frac{aa}{bb}=q$, on aura donc $udu=qzdz$, $du^2=\frac{qz^2dz^2}{zz+bb}$, & $\sqrt{dz^2+du^2}$ $=\frac{dz\sqrt{(q+1)z^2+bb}}{\sqrt{zz+bb}}$. En supposant $(q+1)z^2+bb$ $=bx$, ou $z^2=\frac{bx-bb}{q+1}$, on trouvera $2zdz=\frac{bdx}{q+1}$, $dz=\frac{bdx}{\sqrt{q+1}\cdot 2\sqrt{bx+bb}}$, & $\frac{dz\sqrt{(q+1)z^2+bb}}{\sqrt{zz+bb}}=$ $\frac{dx\sqrt{bx}}{2\sqrt{xx+bx(q-1)-qbb}}=\frac{dx\sqrt{bx}}{2\sqrt{xx+x\left(\frac{aa-bb}{b}\right)-a^2}}=$ $\sqrt{dz^2+du^2}$.

CCLXI.

LEMME II. Trouver la différentielle de l'arc de l'ellipse.

En nommant les deux axes $2a$, & $2b$, z l'abscisse prise depuis le centre sur l'axe $2a$, & u l'ordonnée correspondante, on a l'equation $uu=\frac{bb}{aa}(aa-zz)$ $=q(aa-zz)$, en faisant $\frac{bb}{aa}=q$; donc $udu=-$ $qzdz$, $u^2du^2=q^2z^2dz^2$, $du^2=\frac{q^2z^2dz}{aa-zz}$, & $\sqrt{dz^2+du^2}$ $=\frac{dz\sqrt{(q-1)zz+aa}}{\sqrt{aa-zz}}$. En supposant $(q-1)zz+aa$ $=$

$=ax$, ou $zz=\frac{ax-aa}{q-1}$, on trouvera $2zdz=\frac{adx}{q-1}$, $dz=\frac{adx}{(q-1).2z}=\frac{adx}{\sqrt{q-1}.2\sqrt{ax-aa}}$, & $\sqrt{dz^2+du^2}$ $=\frac{dx\sqrt{ax}}{2\sqrt{ax(q+1)-xx-qaa}}=\frac{dx\sqrt{ax}}{2\sqrt{x(\frac{aa+bb}{a})-x^2-b^2}}=$ $\frac{dx\sqrt{ax}}{2\sqrt{px-xx-bb}}$, p etant une quantité positive $=\frac{aa+bb}{a}$.

CCLXII.

COROLLAIRE I. L'intégrale de la différentielle binome $x^{-\frac{3}{2}}dx(xx+bb)^{\frac{1}{2}}$ depend de la rectification d'un arc d'hyperbole entre les asymptotes perpendiculaires, dont l'equation est $zu=b$, en prenant z pour l'abscisse sur une asymptote depuis le centre, u pour l'ordonnée, & en faisant $z=x^{\frac{1}{2}}$; car supposé que cet arc d'hyperbole soit s, on aura $ds=\sqrt{dz^2+du^2}=$ $z^{-2}dz\sqrt{z^4+bb}=\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}dx(xx+bb)^{\frac{1}{2}}$; $x^{-\frac{3}{2}}\times$ $dx(xx+bb)^{\frac{1}{2}}=2ds$, & $S.x^{-\frac{3}{2}}dx(xx+bb)^{\frac{1}{2}}=2s$, plus, ou moins la constante; d'ou il suit que l'intégrale de la différentielle $x^{-\frac{3}{2}}dx(e+fx^2)^{\frac{1}{2}}$ depend de la

rectification de l'hyperbole, lorsque e, & f sont des quantités positives ; car $e+fx^2=f(\frac{e}{f}+x^2)$, par consequent $x^{-\frac{3}{2}}dx(e+fx^2)^{\frac{1}{2}}=f^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{3}{2}}dx(\frac{e}{f}+x^2)^{\frac{1}{2}}$; en faisant $bb=\frac{e}{f}$, on a $x^{-\frac{3}{2}}dx(e+fx^2)^{\frac{1}{2}}=f^{\frac{1}{2}}\times x^{-\frac{3}{2}}dx(xx+bb)^{\frac{1}{2}}$.

CCLXIII.

COROLLAIRE II. L'intégrale de la différentielle binome $x^{\frac{1}{2}}dx(xx-bb)^{-\frac{1}{2}}$ depend de la rectification d'un arc d'hyperbole equilatere, dont l'axe est $2b$, & l'equation $uu=zz-bb$, en prenant z pour l'abscisse sur le premier axe depuis le centre, u pour l'ordonnée, & en faisant $bx=2zz-bb$, ou $z=\sqrt{\frac{bx+bb}{2}}$. Car supposé que cet arc soit s, on aura $ds=\frac{dx\sqrt{bx}}{2\sqrt{xx-bb}}=\frac{1}{2}b^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}dx(xx-bb)^{-\frac{1}{2}}$; $\frac{2ds}{\sqrt{b}}=x^{\frac{1}{2}}dx(xx-bb)^{-\frac{1}{2}}$; par consequent $\frac{2s}{\sqrt{b}}=S.x^{\frac{1}{2}}dx(xx-bb)^{-\frac{1}{2}}$; d'ou il suit que l'intégrale de la différentielle $x^{\frac{1}{2}}dx(e+fx^2)^{-\frac{1}{2}}$

depend de la rectification de l'hyperbole, lorsque e est negative, & f positive. Car, puisque $(e+fx^2)^{-\frac{1}{2}} = f^{-\frac{1}{2}}(\frac{e}{f}+x^2)^{-\frac{1}{2}}$, en faisant $-bb=\frac{e}{f}$, ou $b=\sqrt{-\frac{e}{f}}$, on aura $x^{\frac{1}{2}}dx(e+fx^2)^{-\frac{1}{2}}=f^{-\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}dx \times (xx-bb)^{-\frac{1}{2}}$.

CCLXIV.

COROLLAIRE III. L'intégrale de la différentielle trinome $x^{\frac{1}{2}}dx(xx\pm px-bb)^{-\frac{1}{2}}$ depend de la rectification d'un arc d'hyperbole, dont le second axe est $2b$, le premier axe $2a$, & l'equation $uu=\frac{bb}{aa}(zz-aa)$, en prenant z pour l'abscisse sur le premier axe depuis le centre, u pour l'ordonnée, & en faisant $q=\frac{bb}{aa}$, $(q+1)zz-aa=ax$, ou $z=\sqrt{\frac{ax+aa}{q+1}}$, & le demi-axe $a=\mp p+\sqrt{\frac{1}{4}pp+bb}$, qu'on trouve par l'equation $\pm p=\frac{aa-bb}{a}$. Car, supposé que la différentielle de l'arc de cette hyperbole soit $ds=\sqrt{dz^2+du^2}$, on aura

$ds = \frac{1}{2} a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} dx \left(xx + \left(\frac{aa-bb}{a}\right) x - bb\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} a^{\frac{1}{2}} \times$ $x^{\frac{1}{2}} dx (xx \pm px - bb)^{-\frac{1}{2}}$; par conſequent $\frac{2s}{\sqrt{a}} = S. x^{\frac{1}{2}} \times$ $dx (xx \pm px - bb)^{-\frac{1}{2}}$; d'ou il ſuit que l'intégrale de la différentielle trinome $x^{\frac{1}{2}} dx (e + fx + gx^2)^{-\frac{1}{2}}$ depend de la rectification de l'hyperbole, lorſque g etant poſitive, e eſt negative, quelque ſoit f. Car, puiſque $e + fx + gx^2 = g\left(\frac{e}{g} + \frac{fx}{g} + xx\right)^{-\frac{1}{2}}$, on aura $(e + fx + gxx)^{-\frac{1}{2}} = g^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{e}{g} + \frac{fx}{g} + x^2\right)^{-\frac{1}{2}}$; & $x^{\frac{1}{2}} \times$ $dx (e + fx + gxx)^{-\frac{1}{2}} = g^{-\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} dx (xx \pm px - bb)^{-\frac{1}{2}}$, en faiſant $-bb = \frac{e}{g}$, ou $b = \sqrt{-\frac{e}{g}}$, & $\pm p = \frac{f}{g}$.

CCLXV.

COROLLAIRE IV. L'intégrale de la différentielle trinome $x^{\frac{1}{2}} dx (px - xx - bb)^{-\frac{1}{2}}$ depend de la rectification d'un arc d'ellipſe, dont un axe eſt $2b$, & l'autre $2a$, & l'equation $uu = \frac{bb}{aa}(aa - zz)$, en prenant z pour l'abſciſſe ſur l'axe $2a$, depuis le centre, u pour

l'ordonnée, & en faiſant $\frac{bb}{aa}=q$, $z=\sqrt{\frac{ax-aa}{q-1}}$, & le demi-axe $a=\frac{1}{2}p\pm\sqrt{\frac{1}{4}pp-bb}$, qu'on trouvera par l'equation $p=\frac{bb+aa}{a}$. Car, ſuppoſé que la différentielle de l'arc de cette ellipſe ſoit $ds=\sqrt{dz^2+du^2}$, on aura $ds=\frac{1}{2}a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}dx(px-xx-bb)^{-\frac{1}{2}}$, & $\frac{2s}{\sqrt{a}}=$ $S.x^{\frac{1}{2}}dx(px-xx-bb)^{-\frac{1}{2}}$. Il ſuit de la que l'intégrale de la différentielle trinome $x^{\frac{1}{2}}dx(e+fx+gxx)^{-\frac{1}{2}}$ depend de la rectification de l'ellipſe, lorſque f etant poſitive, e & g ſont negatives. Car, ſi on ſuppoſe $f=$ $+c$ quantité poſitive, $e=-q$, & $g=-r$, on aura $x^{\frac{1}{2}}dx(e+fx+gxx)^{-\frac{1}{2}}=x^{\frac{1}{2}}dx(cx-rxx-q)^{-\frac{1}{2}}$ $=r^{-\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}dx\left(\frac{c}{r}x-xx-\frac{q}{r}\right)^{-\frac{1}{2}}=r^{-\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}dx(px-xx$ $-bb)^{-\frac{1}{2}}$, en ſuppoſant $p=\frac{c}{r}$, & $bb=\frac{q}{r}$.

CCLXVI.

REMARQUE. On voit par les demonſtrations precedentes que les différentielles binomes & trinomes des

arcs d'ellipſe & d'hyperbole ſont fort ſimples, & qu'on peut facilement trouver leurs intégrales approchées par les ſeries convergentes, que fourniſſent les formules de Newton dans les Problemes I., & II. de l'Article troiſieme du Chapitre precedent; mais perſonne que nous ſçachions, n'a pû juſqu'a preſent rendre ces différentielles rationelles, ou les reduire a celles des aires des ſections coniques. C'eſt ce qui a engagé M. Maclaurin, dans ſon Traité des fluxions, a diſtinguer différentes claſſes, ou ordres de différentielles. La premiere claſſe comprend celles, dont les intégrales peuvent être determinées exactément en termes finis par des expreſſions algebriques, ou geometriquement par des figures rectilignes. La ſeconde claſſe eſt pour les différentielles, dont les intégrales peuvent ſe trouver par les Tables des logarithmes & des ſinus, ou par les quadratures de l'hyperbole, & de l'ellipſe, ou du cercle. La troiſieme claſſe renferme les différentielles, dont les intégrales ne ſe trouvent, qu'en ſuppoſant la rectification des arcs elliptiques, ou hyperboliques, & ces intégrales, avec celles des deux autres claſſes ſont toutes compriſes dans le genre de celles qui dependent des ſections coniques, en mettant au nombre de ces ſections le triangle & le cercle. Ce ſont là les trois premieres claſſes de différentielles, auxquelles on en peut ajouter une infinité d'autres. Quelques Mathematiciens

du premier ordre ont fait beaucoup de recherches curieuſes ſur les différentielles reductibles a la troiſieme claſſe. Quoiqu'on puiſſe en trouver les intégrales par les ſeries convergentes de Newton, comme on trouve les arcs de l'hyperbole & de l'ellipſe, nous avons crû devoir etablir les principes de ces reductions.

CCLXVII.

PROBLEME I. Trouver l'intégrale de la différentielle binome $x^{\frac{1}{2}} dx (bb - xx)^{-\frac{1}{2}}$.

SOLUTION. En ſuppoſant $x = \frac{bb}{z}$, on aura $x^{\frac{1}{2}} = bz^{-\frac{1}{2}}$, $dx = -bbz^{-2}dz$, $xx = b^4 z^{-2}$, & ſubſtituant ces valeurs dans la différentielle propoſée, on la trouve $= \frac{-b^2 dz}{z^{\frac{3}{2}} \sqrt{zz - bb}}$. Or cette différentielle $\frac{-b^2 dz}{z^{\frac{3}{2}} \sqrt{zz - bb}}$ $= \frac{-z^2 dz - bbdz}{z^{\frac{3}{2}} \sqrt{zz - bb}} + \frac{z^{\frac{1}{2}} dz}{\sqrt{zz - bb}}$, comme on le voit en reduiſant la fraction $\frac{z^{\frac{1}{2}} dz}{\sqrt{zz - bb}}$ au denominateur

$z^{\frac{3}{2}}\sqrt{zz-bb}$. Cette différentielle $\frac{z^{\frac{1}{2}}dz}{\sqrt{zz-bb}}=ds$, eſt celle d'un arc s d'hyperbole equilatere, dont l'axe eſt $2b$, l'equation $uu=yy-bb$, en prenant pour y l'abſciſſe ſur le premier axe depuis le centre, u pour l'ordonnée correſpondante, & en faiſant $y=\sqrt{\frac{bz+bb}{2}}$ $=\frac{b}{\sqrt{2}}.\sqrt{\frac{b+x}{x}}$ (Art. CCLXIII.) : donc l'intégrale $S.\frac{z^{\frac{1}{2}}dz}{\sqrt{zz-bb}}=s$. l'autre différentielle $\frac{-z^{2}dz-bbdz}{z^{\frac{3}{2}}\sqrt{zz-bb}}$ $=\frac{-z^{2}dz-bbdz}{z^{\frac{3}{2}}z^{\frac{1}{2}}\sqrt{z-\frac{bb}{z}}}=\frac{-dz-bbz^{-2}dz}{\sqrt{z-bbz^{-1}}}=-\frac{d\pi}{\pi^{\frac{1}{2}}}$, en faiſant $z-\frac{bb}{z}=\pi$; ce qui donne la différentielle dz $+bbz^{-2}dz=d\pi$ & $\sqrt{z-bbz^{-1}}=\pi^{\frac{1}{2}}$; par conſequent l'intégrale $S.\frac{-z^{2}dz-bbdz}{z^{\frac{3}{2}}\sqrt{zz-bb}}=-2\pi^{\frac{1}{2}}$, & l'intégrale de la fraction propoſée $S.\ x^{\frac{1}{2}}dx(bb-xx)^{-\frac{1}{2}}$ $=$

$= s - 2\pi^{\frac{1}{2}} = s - 2\sqrt{z - \frac{bb}{z}} = s - 2\sqrt{\frac{bb}{x} - x} =$

$s - 2\sqrt{\frac{bb-xx}{x}}$, plus, ou moins une conſtante. *C.Q.F.T.*

CCLXVIII.

COROLLAIRE I. Donc l'intégrale de la différentielle $x^{\frac{1}{2}}dx(bb-xx)^{-\frac{1}{2}}$ depend de la rectification de l'hyperbole. Or ſi dans la différentielle binome $x^{\frac{1}{2}}dx(e+fx^2)^{-\frac{1}{2}}$, e eſt poſitive, & f negative $= -c$, de ſorte qu'on ait $e+fx^2 = e - cx^2 = c \times (\frac{e}{c} - x^2)$, & $(e+fx^2)^{-\frac{1}{2}} = c^{-\frac{1}{2}}(\frac{e}{c}-x^2)^{-\frac{1}{2}}$, on aura $x^{\frac{1}{2}}dx(e+fx^2)^{-\frac{1}{2}} = c^{-\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}dx(\frac{e}{c}-xx)^{-\frac{1}{2}} = c^{-\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}dx(bb-xx)^{-\frac{1}{2}}$, en faiſant $bb = \frac{e}{c}$; par conſequent l'intégrale $S.\ x^{\frac{1}{2}}dx(e+fx^2)^{-\frac{1}{2}} = c^{-\frac{1}{2}} \times S.x^{\frac{1}{2}}dx(bb-xx)^{-\frac{1}{2}} = \frac{s-2\sqrt{\frac{bb-xx}{x}}}{\sqrt{c}} = \frac{s}{\sqrt{c}} - \frac{2\sqrt{\frac{e}{c}-xx}}{\sqrt{cx}}$; ce qui demontre que l'intégrale de la différentielle

$x^{\frac{1}{2}} dx (e + fx)^{-\frac{1}{2}}$ depend auſſi de la rectification de l'hyperbole, lorſque, e etant poſitive, f eſt negative.

CCLXIX.

COROLLAIRE II. En ſuppoſant $x = \frac{bb}{z}$, on trouve, comme dans la ſolution du Probleme, que l'intégrale de la différentielle trinome $x^{\frac{1}{2}} dx (bb \pm px - xx)^{-\frac{1}{2}}$ eſt $S. \frac{z^{\frac{1}{2}} dz}{(zz \pm pz - bb)^{\frac{1}{2}}} - \frac{2\sqrt{zz \pm pz - bb}}{\sqrt{z}}$. Or on ſçait, par le Coroll. III. des Lemmes precedents, que l'intégrale de la différentielle $z^{\frac{1}{2}} dz (zz \pm pz - bb)^{-\frac{1}{2}}$ depend de la rectification d'un arc d'hyperbole, dont le ſecond axe eſt $2b$, le premier axe $2a$, l'equation $uu = \frac{bb}{aa}(yy - aa)$, en prenant y pour l'abſciſſe ſur le premier axe depuis le centre, u pour l'ordonnée, & en faiſant $q = \frac{bb}{aa}$, $y = \sqrt{\frac{az + aa}{q + 1}}$; & $a = \mp p + \sqrt{\frac{1}{4}pp - bb}$; d'ou il ſuit que l'intégrale de la différentielle trinome $x^{\frac{1}{2}} dx (e + fx + gx^2)^{-\frac{1}{2}}$ depend de

la rectification de l'hyperbole, lorsque e etant positive, g est negative, quelque soit f. Car si on suppose e positive, & $g = -c$, on aura $e + fx - cxx = c\left(\frac{e}{c} + \frac{fx}{c} - xx\right) = c(bb \pm px - xx)$, en faisant $bb = \frac{e}{c}$, & $\pm p = \frac{f}{c}$, & par consequent $x^{\frac{1}{2}} dx (e + fx + gx^2)^{-\frac{1}{2}} = c^{-\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} dx (bb \pm px - xx)^{-\frac{1}{2}}$.

CCLXX.

LEMME III. En supposant $r = \frac{\theta}{2}$, & $s = r + \lambda$ on a ces deux equations.

I. $\frac{1}{2} x^{\theta} (e + fx^2)^{\lambda} = re.\ S.\ x^{\theta - 1} dx (e + fx^2)^{\lambda - 1} + sf.\ S.\ x^{\theta + 1} dx (e + fx^2)^{\lambda - 1}$.

II. $\frac{1}{2} x^{\theta} (e + fx^2)^{\lambda} = s.\ S.\ x^{\theta - 1} dx (e + fx^2)^{\lambda} - \lambda e.\ S.\ x^{\theta - 1} dx (e + fx^2)^{\lambda - 1}$.

Ces equations ne sont que des cas particuliers des formules generales, que nous avons demontrées dans les Corollaires du Theor. V., Article I., Chap. VI., & on peut s'assurer de leur exactitude sans autre demonstration, en prenant dans chacune les différentielles de coté,

& d'autre du ſigne d'egalité, qu'on trouve egales entr'elles.

CCLXXI.

COROLLAIRE. Lorſque r, & s ſont $= o$, ces equations n'ont point lieu, puiſqu'alors elles s'evanouïſſent. Lorſque l'une des deux quantités r, ou s dans la premiere equation, & s, ou λ dans la ſeconde devient nulle, l'intégrale qui a l'autre dans ſon coefficient eſt toujours algebrique; dans tous les autres cas, ou r & s dans la premiere equation, & s & λ dans la ſeconde ſont réelles, l'une des deux intégrales deſignées par $S.$ etant donnée, on trouvera toujours l'autre. Ces ſortes de formules, ou d'equations n'induiſent point en erreur, lorſqu'on a egard aux exceptions qui font qu'elles n'ont point lieu dans quelques cas, ou qu'elles ne l'ont pas totalement. Par exemple, ſi l'une de ces deux intégrales $S. x^2 dx (c + f x^2)^{-\frac{5}{2}}$, & $S. x^4 dx (c + f x^2)^{-\frac{5}{2}}$ etant donnée, on vouloit trouver l'autre par la premiere equation, on ſuppoſeroit $x^2 = x^{\theta - 1}$, $x^4 = x^{\theta + 1}$, & $(c + f x^2)^{\lambda - 1} = (c + f x^2)^{-\frac{5}{2}}$, ce qui donneroit $\theta - 1 = 2$, $\theta = 3$, $\lambda - 1 = -\frac{5}{2}$, $\lambda = -\frac{3}{2}$, $r = \frac{1}{2}$,

$=\frac{3}{2}$, & $s=r+\lambda=\frac{3}{2}-\frac{3}{2}=o$, & la premiere equation deviendroit $\frac{1}{2}x^3(e+fx^2)^{-\frac{3}{2}}=\frac{3}{2}e.S.x^2dx(e+fx^2)^{-\frac{5}{2}}+o$, le dernier terme $sf.S.x^{\theta+1}dx(e+fx^2)^{\lambda-1}$ etant nul, a cause de $s=o$; on auroit donc l'intégrale $S.x^2dx(e+fx^2)^{-\frac{5}{2}}=\frac{x^3}{3e}(e+fx^2)^{-\frac{3}{2}}$, qui est algebrique; mais on ne pourroit point trouver l'autre intégrale $S.x^4dx(e+fx^2)^{-\frac{5}{2}}$, par ce que réellement elle ne depend pas de la premiere $S.x^2dx(e+fx^2)^{-\frac{5}{2}}$.

CCLXXII.

PROBLEME II. L'intégrale de la différentielle $x^{-\frac{3}{2}}dx(bb+xx)^{\frac{1}{2}}$ etant donnée, trouver les intégrales des deux différentielles $x^{\frac{1}{2}}dx(bb+xx)^{\frac{1}{2}}$, & $x^{\frac{1}{2}}dx\times(bb+xx)^{-\frac{1}{2}}$.

SOLUTION. I.° Pour trouver la premiere intégrale $S.x^{\frac{1}{2}}dx(bb+xx)^{\frac{1}{2}}$, nous supposerons dans la premiere equation du Lemme precedent $x^{\theta-1}dx(e+fx^2)^{\lambda-1}$

$= x^{-\frac{3}{2}} dx\,(bb+xx)^{\frac{1}{2}}$, & $x^{\theta+1}\,dx\,(e+fx^2)^{\lambda-1} = x^{\frac{1}{2}} dx\,(bb+xx)^{\frac{1}{2}}$, d'ou l'on tire $\theta - 1 = -\frac{3}{2}$, $\theta = -\frac{1}{2}$, $\theta + 1 = \frac{1}{2}$, $\lambda - 1 = \frac{1}{2}$, $\lambda = \frac{3}{2}$, $e = bb$, $f = 1$, $r = \frac{\theta}{2} = -\frac{1}{4}$, $s = r + \lambda = \frac{5}{4}$, & la premiere equation devient $\frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}(bb+xx)^{\frac{3}{2}} = -\frac{1}{4} bb.\ S.x^{-\frac{3}{2}}\,dx \times (bb+xx)^{\frac{1}{2}} + \frac{5}{4}\,S.x^{\frac{1}{2}} dx\,(bb+xx)^{\frac{1}{2}}$; d'ou l'on deduit $S.\ x^{\frac{1}{2}}\,dx\,(bb+xx)^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{5}\,x^{-\frac{1}{2}} dx\,(bb+xx)^{\frac{3}{2}} + \frac{bb}{5}\,S.x^{-\frac{3}{2}}\,dx\,(bb+xx)^{\frac{1}{2}}$. *C.Q.F.T.*

II.° Pour trouver la feconde intégrale $S.\ x^{\frac{1}{2}}\,dx \times (bb+xx)^{-\frac{1}{2}}$, nous fuppoferons dans la feconde equation du Lemme $x^{\theta-1}\,dx(e+fx^2)^{\lambda} = x^{\frac{1}{2}}\,dx \times (bb+xx)^{\frac{1}{2}}$, & $x^{\theta-1}\,dx\,(e+fx^2)^{\lambda-1} = x^{\frac{1}{2}}\,dx(bb+xx)^{-\frac{1}{2}}$; d'ou l'on tire $\theta - 1 = \frac{1}{2}$, $\theta = \frac{3}{2}$, $\lambda = \frac{1}{2}$,

$\lambda - 1 = -\frac{1}{2}, e = bb, f = 1, r = \frac{g}{2} = \frac{3}{4}, s = r + \lambda = \frac{5}{4}$, & la seconde equation devient $\frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}}(bb + xx)^{\frac{1}{2}} = \frac{5}{4}$ $S. x^{\frac{1}{2}}dx(bb + xx)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}bb.S.x^{\frac{1}{2}}dx(bb + xx)^{-\frac{1}{2}}$; en reduisant on a $2bbS.x^{\frac{1}{2}}dx(bb + xx)^{-\frac{1}{2}} = 5.S.x^{\frac{1}{2}}dx \times (bb + xx)^{\frac{1}{2}} - 2x^{\frac{3}{2}}(bb + xx)^{\frac{1}{2}}$, & substituant au lieu de $5.S.x^{\frac{1}{2}}dx(bb + xx)^{\frac{1}{2}}$, sa valeur $2x^{-\frac{1}{2}}(bb + xx)^{\frac{3}{2}} + bb.S.x^{-\frac{3}{2}}dx(bb + xx)^{\frac{1}{2}}$, qu'on a trouvé par le premier cas, on aura $S.\ x^{\frac{1}{2}}dx(bb + xx)^{-\frac{1}{2}} = \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{bb} \times (bb + xx)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}S.x^{-\frac{3}{2}}dx(bb + xx)^{\frac{1}{2}} - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{bb}(bb + xx)^{\frac{1}{2}}$ $= \frac{x^{-\frac{1}{2}}(bb + xx)^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{3}{2}}(bb + xx)^{\frac{3}{2}}}{bb} + \frac{1}{2}S.x^{-\frac{3}{2}}dx(bb + xx^{\frac{1}{2}}$. *C. Q. F. T.*

CCLXXIII.

Corollaire I. Puisque l'intégrale de la différentielle $x^{-\frac{3}{2}}dx(bb + xx)^{\frac{1}{2}}$ se trouve par la rectifica-

tion d'un arc d'hyperbole (Art. CCLXII.), celles des deux différentielles $x^{\frac{1}{2}}dx(bb+xx)^{\frac{1}{2}}$, & $x^{\frac{1}{2}}dx(bb+xx)^{-\frac{1}{2}}$ ne dependront que de quantités algebriques, & de la rectification d'un arc d'hyperbole; d'ou l'on conclût que l'intégrale de la différentielle $x^{\frac{1}{2}}dx(e+fx^2)^{-\frac{1}{2}}$ ne depend aussi que de quantités algebriques, & de la rectification de l'hyperbole, lorsque e & f sont toutes deux positives; puisque dans ce cas $(e+fx^2)^{\frac{1}{2}}$ $=f^{\frac{1}{2}}\left(\frac{e}{f}+x^2\right)^{\frac{1}{2}}=f^{\frac{1}{2}}(bb+xx)^{\frac{1}{2}}$ & $x^{\frac{1}{2}}dx(e+fx^2)^{-\frac{1}{2}}$ $=\frac{x^{\frac{1}{2}}dx}{\sqrt{f}}(bb+xx)^{-\frac{1}{2}}$, en faisant $bb=\frac{e}{f}$, ou $b=\sqrt{\frac{e}{f}}$.

CCLXXIV.

COROLLAIRE II. Donc l'intégrale de la différentielle $x^{\frac{1}{2}}dx(e+fx^2)^{-\frac{1}{2}}$ ne depend que de quantités algebriques, & de la rectification de l'hyperbole, quelques soient e & f; car ces quantités e & f ne peuvent être

être toutes deux negatives, par ce qu'alors $\sqrt{e+fx^2}$, & la différentielle $x^{\frac{1}{2}}dx(e+fx^2)^{-\frac{1}{2}}$ seroient imaginaires. De plus nous avons demontré que l'intégrale de la différentielle $x^{\frac{1}{2}}dx(e+fxx)^{-\frac{1}{2}}$ depend de la rectification de l'hyperbole, lorsque e & f sont positives (Coroll. precedent), & aussi lorsque l'une de ces deux quantités est positive & l'autre negative (Art. CCLXII., CCLXIII, & CCLXVIII.); donc en general l'expression différentielle cy-dessus ne depend que de quantités algebriques, & de la rectification de l'hyperbole seule.

CCLXXV.

THEOREME II. Les intégrales de toutes les différentielles, qui naissent en substituant dans la différentielle generale $x^{2\tau+\frac{1}{2}}dx(e+fx^2)^{\pi\pm\frac{1}{2}}$ des nombres entiers quelconques positifs, ou negatifs a la place de τ, & de π, dependent de l'intégrale $S.\ \frac{x^{\frac{1}{2}}dx}{\sqrt{e+fx^2}}$, & par consequent de quantités algebriques, & de la rectification de l'hyperbole seulement.

DEMONSTRATION. En comparant la différentielle $x^{2\tau+\frac{1}{2}}dx(e+fx^2)^{\pi\pm\frac{1}{2}}$ avec la différentielle

$x^{\theta-1}dx(e+fx^2)^{\lambda-1}$, & la différentielle $x^{2\tau+2+\frac{1}{2}}\times dx(e+fx^2)^{\pi\pm\frac{1}{2}}$ avec la différentielle $x^{\theta+1}dx(e+fx^2)^{\lambda-1}$ dans la premiere equation du Lemme III. (Art. CCLXX.) $\frac{1}{2}x^{\theta}(e+fx^2)^{\lambda}=re.\,S.x^{\theta-1}dx(e+fx^2)^{\lambda-1}+sf.\,S.x^{\theta+1}dx(e+fx^2)^{\lambda-1}$, on aura $\theta-1=2\tau+\frac{1}{2}$, $\theta+1=2\tau+2+\frac{1}{2}$, $\theta=2\tau+\frac{3}{2}$, $\lambda-1=\pi\pm\frac{1}{2}$, $\lambda=\pi+1\pm\frac{1}{2}$, $r=\frac{\theta}{2}=\tau+\frac{3}{4}$, & $s=r+\lambda=\tau+\pi+1+\frac{3}{4}\pm\frac{2}{4}$. Or ces valeurs de r, & s, dans lesquelles τ, & π sont toujours des nombres entiers, ou zero, ne peuvent jamais devenir egales a zero. Car si on suppose r, ou $\tau+\frac{3}{4}=o$, on aura un nombre entier, ou zero $=-\frac{3}{4}$, & si on suppose s, ou $\tau+\pi+1+\frac{3}{4}\pm\frac{2}{4}=o$, on aura un nombre entier, ou zero $=-\frac{3}{4}\mp\frac{2}{4}$; ce qui est absurde: donc (Art. CCLXXI.) la premiere equation du Lemme III. aura toujours lieu, lorsqu'on ajoutera ± 2, autant de

fois qu'on voudra, a l'expofant $+\frac{1}{2}$ de x hors de la parenthefe dans la différentielle $x^{\frac{1}{2}} dx (e+fx^2)^{\pi \pm \frac{1}{2}}$.

De même en comparant la différentielle $x^{2\tau+\frac{1}{2}} \times dx(e+fx^2)^{\pi \pm \frac{1}{2}}$ avec la différentielle $x^{\theta-1} dx (e+fx^2)^{\lambda-1}$, & la différentielle $x^{2\tau+\frac{1}{2}} dx (e+fx^2)^{\pi+1 \pm \frac{1}{2}}$ avec $x^{\theta-1} dx (e+fx^2)^{\lambda}$, dans la feconde equation du Lem. III. $\frac{1}{2} x^{\theta} (e+fx^2)^{\lambda} = s. S. x^{\theta-1} dx (e+fx^2)^{\lambda} - \lambda e. S. x^{\theta-1} dx (e+fx^2)^{\lambda-1}$, on aura $\theta - 1 = 2\tau + \frac{1}{2}$, $\theta = 2\tau + \frac{3}{2}$, $\lambda - 1 = \pi \pm \frac{1}{2}$, $\lambda = \pi + 1 \pm \frac{1}{2}$, $r = \frac{\theta}{2} = \tau + \frac{3}{4}$, & $s = r + \lambda = \tau + \pi + 1 + \frac{3}{4} \pm \frac{2}{4}$, par ou l'on voit que les valeurs de s & de λ ne peuvent jamais être nulles, & que (Art. CCLXXI.) la feconde equation du Lemme III. aura toujours lieu, lorfqu'on ajoutera fucceffivement ± 1, autant de fois qu'on voudra, a l'expofant $\pm \frac{1}{2}$ du binome $e+fx^2$ dans la différentielle $x^{2\tau+\frac{1}{2}} dx (e+fx^2)^{\pm \frac{1}{2}}$, ou dans la différentielle $x^{2\tau+\frac{1}{2}} dx (e+fx^2)^{\pi \pm \frac{1}{2}}$. Donc, l'intégrale

$S.x^{\frac{1}{2}}dx(e+fx^2)^{-\frac{1}{2}}$ etant donnée, on pourra toujours trouver par les deux equations du Lemme III. l'intégrale de la différentielle $x^{2\tau+\frac{1}{2}}dx(e+fx^2)^{\tau\pm\frac{1}{2}}$, lorſque τ & π ſont des nombres entiers ou zero, & par ce que l'intégrale $S.x^{\frac{1}{2}}dx(e+fx^2)^{-\frac{1}{2}}$ ne depend que de quantités algebriques, & de la rectification de l'hyperbole ſeule (Art. CCLXXIV.), l'intégrale $S.x^{2\tau+\frac{1}{2}}\times dx(e+fx^2)^{\tau\pm\frac{1}{2}}$ ne dependra auſſi que de quantités algebriques, & de la rectification de l'hyperbole. *C. Q. F. D.*

CCLXXVI.

COROLLAIRE I. Si on ſuppoſe $x^2=z^n$, ou $x=z^{\frac{n}{2}}$, on aura $dx=\frac{n}{2}z^{\frac{n}{2}-1}dz$, $x^{2\tau+\frac{1}{2}}=z^{\tau n+\frac{n}{4}}$, $x^{2\tau+\frac{1}{2}}dx=\frac{n}{2}z^{\tau n+\frac{3n}{4}-1}dz$, & $x^{2\tau+\frac{1}{2}}dx(e+fx^2)^{\tau\pm\frac{1}{2}}=\frac{n}{2}z^{\tau n+\frac{3n}{4}-1}dz(e+fz^n)^{\tau\pm\frac{1}{2}}$, quelque ſoit n. Donc l'intégrale de cette derniere différentielle, en ôtant, ſi l'on veut le coefficient conſtant $\frac{n}{2}$, ne de-

pend que de quantites algebriques, & de la rectification de l'hyperbole.

CCLXXVII.

COROLLAIRE II. Si on ſuppoſe $z = y^{-1}$ dans la différentielle $z^{\tau n + \frac{3n}{4} - 1} dz (e + fz^n)^{\pi \pm \frac{1}{2}}$, on aura

$$dz = -y^{-2} dy, z^n = y^{-n}, z^{\tau n + \frac{3n}{4} - 1} = y^{-\tau n - \frac{3n}{4} + 1},$$

$$e + fz^n = e + fy^{-n} = \frac{ey^n + f}{y^n}, \quad (e + fz^n)^{\pi \pm \frac{1}{2}} =$$

$$\frac{(ey^n + f)^{\pi \pm \frac{1}{2}}}{y^{\pi n \pm \frac{n}{2}}}, \text{ \& } z^{\tau n + \frac{3n}{4} - 1} dz (e + fz^n)^{\pi \pm \frac{1}{2}} =$$

$$\frac{dy (ey^n + f)^{\pi \pm \frac{1}{2}}}{y^{\tau n + \pi n + 1 + \frac{3n}{4} \pm \frac{n}{2}}},$$ dont l'intégrale ne dependra que de quantités algebriques, & de la rectification de l'hyperbole, lorſque τ, & π ſont des nombres entiers ou zero, & n un nombre quelconque.

CCLXXVIII.

REMARQUE. On pourroit encore trouver d'autres formules generales de différentielles dont les intégrales ne dependroient que de quantités algebriques, & de la

rectification de l'hyperbole, en rendant rationelle la différentielle binome $dx(e+fx^2)^{\pm\frac{1}{2}}$, ce qu'on peut toujours faire par nôtre Table de reduction. Car on trouvera par la une valeur rationelle de x, laquelle etant substituée dans les formules generales cy-dessus donnera d'autres différentielles plus composées, dont les intégrales ne dependront que de quantités algebriques, & de la rectification de l'hyperbole.

CCLXXIX.

PROBLEME III. Trouver l'intégrale de la différentielle $x^{-\frac{1}{2}}dx(bb-xx)^{-\frac{1}{2}}$.

SOLUTION. Il est evident que $\frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}\sqrt{bb-xx}} =$

$$\frac{bdx+xdx-xdx}{bx^{\frac{1}{2}}\sqrt{bb-xx}} = \frac{dx(b+x)}{bx^{\frac{1}{2}}\sqrt{bb-xx}} - \frac{x^{\frac{1}{2}}dx}{b\sqrt{bb-xx}}.$$ Or

(Art. CCLXVII.) l'intégrale de la différentielle $\frac{x^{\frac{1}{2}}dx}{\sqrt{bb-xx}}$, & par consequent celle de $\frac{x^{\frac{1}{2}}dx}{b\sqrt{bb-xx}}$ se trouve par la rectification d'un arc d'hyperbole &

par une quantité algebrique ; & l'intégrale de l'autre différentielle $\frac{dx(b+x)}{bx^{\frac{1}{2}}\sqrt{bb-xx}}$ se trouve de cette maniere ; par ce que $bb-xx=(b+x)(b-x)$, on aura $\frac{bx(b+x)}{bx^{\frac{1}{2}}\sqrt{bb-xx}} = \frac{dx\sqrt{b+x}}{bx^{\frac{1}{2}}\sqrt{b-x}}$, &, en supposant $b+x = z$, on a $dx=dz$, $\sqrt{b+x}=z^{\frac{1}{2}}$, $x=z-b$, $b-x= 2b-z$, & $\frac{dx\sqrt{b+x}}{bx^{\frac{1}{2}}\sqrt{b-x}} = \frac{z^{\frac{1}{2}}dz}{b\sqrt{3bbz-zz-2bb}}$, différentielle qu'on reduit a la forme $\frac{z^{\frac{1}{2}}dz}{b\sqrt{pz-zz-cc}}$, en faisant $3bb=p$, & $2bb=cc$. Puis donc que l'intégrale de cette différentielle est un arc d'ellipse que nous avons determiné (Art. CCLXV.) on aura aussi l'intégrale de la différentielle $\frac{dx(b+x)}{bx^{\frac{1}{2}}\sqrt{bb-xx}}$ par la rectification de cet arc. Donc on aura l'intégrale de la différentielle proposée par des quantités algebriques, & par les rectifications de l'hyperbole, & de l'ellipse. *C. Q. F. T.*

CCLXXX.

COROLLAIRE I. La différentielle $x^{-\frac{1}{2}} dx(xx-bb)^{-\frac{1}{2}}$, en ſuppoſant $x=\frac{bb}{z}$, ſe reduit a la forme de la precedente; par conſequent ſon intégrale dependra auſſi de quantités algebriques, & des rectifications de l'hyperbole, & de l'ellipſe enſemble. Car en ſuppoſant $x=\frac{bb}{z}$, on aura $x^2=\frac{b^4}{zz}$, $x^{\frac{1}{2}}=\frac{b}{z^{\frac{1}{2}}}$, $\sqrt{xx-bb}=\sqrt{\frac{b^4}{zz}-bb}=\sqrt{\frac{b^4-bbzz}{zz}}=bz^{-1}\sqrt{bb-zz}$, $dx=-\frac{bbdz}{zz}$, & enfin $\frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}\sqrt{xx-bb}}=\frac{-bbz^{-2}dz}{bz^{-\frac{1}{2}}.bz^{-1}\sqrt{bb-zz}}=\frac{-dz}{z^{\frac{1}{2}}\sqrt{bb-zz}}$.

CCLXXXI.

COROLLAIRE II. L'intégrale $S.\frac{dz}{x^{\frac{1}{2}}(e+fx^2)^{\frac{1}{2}}}$ depend de quantités algebriques, & des rectifications de l'hyperbole, & de l'ellipſe enſemble, lorſque des deux quan-

quantités e, & f l'une est positive, & l'autre négative. Car, si $e+fx^2=+e-cx^2$, on aura $\sqrt{e+fx^2}=c^{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{e}{c}-xx}=c^{\frac{1}{2}}\sqrt{bb-xx}$, en faisant $bb=\frac{e}{c}$; & si $e+fx^2=fx^2-c$, on aura $\sqrt{e+fx^2}=f^{\frac{1}{2}}\times\sqrt{x^2-\frac{c}{f}}=f^{\frac{1}{2}}\sqrt{xx-bb}$, en faisant $bb=\frac{c}{f}$.

CCLXXXII.

PROBLEME IV. Trouver l'intégrale de la différentielle $\frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}\sqrt{bb+xx}}$.

SOLUTION. En supposant $\sqrt{xx+bb}=y-x$, on aura $xx+bb=yy-2xy+xx$, $x=\frac{yy-bb}{2y}$, $\sqrt{xx+bb}=y-x=\frac{yy+bb}{2y}$, $dx=\frac{dy(y^2+bb)}{2y^2}$, $x^{\frac{1}{2}}\times\sqrt{bb+xx}=\frac{yy+bb}{2y}\times\frac{\sqrt{yy-bb}}{\sqrt{2y}}$, & $\frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}\sqrt{bb-xx}}=\frac{dy(yy+bb)}{2y^2}\times\frac{2y\sqrt{2y}}{(yy+bb)\sqrt{yy-bb}}=\frac{dy\sqrt{2}}{y^{\frac{1}{2}}\sqrt{yy-bb}}$; différentielle qui a la même forme, que celle de l'Article CCLXXX., & dont l'intégrale par conséquent se trouve

de même, c'est a dire, par des quantités algebriques, & par les rectifications des arcs d'hyperbole, & d'ellipse ensemble. *C. Q. F. T.*

CCLXXXIII.

COROLLAIRE I. L'intégrale $S. \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}\sqrt{e+fx^2}}$ se trouve par des quantités algebriques, & par les rectifications de l'hyperbole, & de l'ellipse ensemble, lorsque e & f sont toutes deux positives. Car $\sqrt{e+fx^2} = f^{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{e}{f}+xx}$ $= f^{\frac{1}{2}}\sqrt{bb+xx}$, en faisant $bb = \frac{e}{f}$.

CCLXXXIV.

COROLLAIRE II. L'intégrale $S. \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}\sqrt{e+fxx}}$ se trouve toujours par des quantités algebriques, & par les rectifications de l'hyperbole & de l'ellipse, quelques soient les quantités e, f. Car elles ne peuvent être toutes deux negatives, par ce qu'alors $\sqrt{e+fxx}$, & $\frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}\sqrt{e+fxx}}$ seroient imaginaires. Mais lorsqu'elles sont

toutes les deux positives, & aussi lorsque l'une est positive, & l'autre negative, l'intégrale $S. \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}\sqrt{e+fxx}}$ se trouve par des quantités algebriques, & par les rectifications de l'hyperbole, & de l'ellipse ensemble (Art. CCLXXXI. & CCLXXXIII.); donc &c.

CCLXXXV.

THEOREME III. L'intégrale de la différentielle generale $x^{2\tau-\frac{1}{2}}dx(e+fxx)^{\pi\pm\frac{1}{2}}$ depend de l'intégrale $S. \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}\sqrt{e+fxx}}$, & par consequent de quantités algebriques, & des rectifications de l'ellipse & de l'hyperbole ensemble, lorsque τ & π sont des nombres entiers quelconques positifs, ou negatifs, ou zero.

Ce Theoreme se demontre de même que le precedent.

CCLXXXVI.

COROLLAIRE. I. Si dans l'equation différentielle $dx\sqrt{x^4+1}$, qui est l'element d'un arc de la premiere parabole cubique, on fait $x=\sqrt{y}$, l'expression pre-

cedente ſe change en celle-cy $\frac{dy\sqrt{yy+1}}{2\sqrt{y}}$, laquelle eſt un cas trés ſimple du Theoreme precedent, en faiſant $\tau = o$, & $\pi \pm \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ donc la rectification de la premiere parabole cubique depend de celles de l'ellipſe, & de l'hyperbole enſemble, & non pas de l'hyperbole ſeule, comme l'ont crû quelques grands Geometres.

CCLXXXVII.

COROLLAIRE II. En ſubſtituant partout $z^{\frac{n}{2}}$ dans la différentielle du Theoreme, on la reduit a la différentielle $\frac{n}{2} z^{\tau n + \frac{n}{4} - 1} dz(c + z^n)^{\pi \pm \frac{1}{2}}$. Donc l'intégrale de cette différentielle $x^{\tau n + \frac{n}{4} - 1} dx(c + fx^n)^{\pi \pm \frac{1}{2}}$ depend de quantités algebriques, & des rectifications de l'hyperbole, & de l'ellipſe enſemble.

CCLXXXVIII.

COROLLAIRE III. En ſubſtituant y^{-1} au lieu de x dans cette derniere différentielle on la reduit a cette autre $\frac{dy(cy^n + f)^{\pi \pm \frac{1}{2}}}{y^{\tau n + \pi n + 1 + \frac{n}{4} \pm \frac{2n}{4}}}$, qui par conſequent

ſera intégrable, comme l'autre, d'ou elle derive.

CCLXXXIX.

COROLLAIRE. IV. On pourroit trouver d'autres formules generales en rendant rationelle la différentielle $dx\sqrt{e+fx^2}$, & ſubſtituant pour x ſa valeur rationelle.

CCXC.

COROLLAIRE V. En joïgnant enſemble les deux derniers Theoremes, on voit que la différentielle generale $x^{2r \pm \frac{1}{2}}dx(e+fx^2)^{r \pm \frac{1}{2}}$, & toutes celles qu'on en derive par ſubſtitution ſont toujours intégrables par les rectifications des ſections coniques, & par des quantités algebriques.

CCXCI.

PROBLEME V. Trouver l'intégrale de la différentielle $\dfrac{dx}{x^{\frac{1}{2}}\sqrt{bb \pm px - xx}}$.

SOLUTION. L'equation $bb \pm px - xx = o$ a deux racines réelles, l'une poſitive $x = \pm \frac{1}{2}p + \sqrt{\frac{1}{4}pp + bb}$, que nous deſignerons par b, & l'autre negative $x =$

$\pm\frac{1}{2}p - \sqrt{\frac{1}{4}pp + bb}$, que nous nommerons $-k$; d'ou il suit que le trinome $bb \pm px - xx$ a pour facteurs réels $b - x$, & $k + x$, & que $\frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}\sqrt{bb \pm px - xx}} =$

$$\frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}\sqrt{(b-x)(k+x)}} = \frac{dx(k+x) - xdx}{kx^{\frac{1}{2}}\sqrt{(b-x)(k+x)}} =$$

$$\frac{dx(k+x)}{kx^{\frac{1}{2}}\sqrt{(b-x)(k+x)}} - \frac{x^{\frac{1}{2}}dx}{k\sqrt{(b-x)(k+x)}} = \frac{dx\sqrt{k+x}}{kx^{\frac{1}{2}}\sqrt{b-x}} -$$

$\frac{x^{\frac{1}{2}}dx}{k\sqrt{bb \pm px - xx}}$. Or l'intégrale $S.\frac{x^{\frac{1}{2}}dx}{k\sqrt{bb \pm px - xx}}$ se trouve par la rectification d'un arc d'hyperbole, & par une quantité algebrique (Art. CCLXIX.); & en faisant $k + x = z$, on aura $dx = dz$, $b - x = b + k - z$, $x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{z - k}$, &

$$\frac{dx\sqrt{k+x}}{kx^{\frac{1}{2}}\sqrt{b-x}} = \frac{z^{\frac{1}{2}}dz}{k\sqrt{z-k}.\sqrt{b+k-z}} = \frac{z^{\frac{1}{2}}dz}{k\sqrt{(b+2k)z - zz - k(b+k)}},$$

différentielle dont l'intégrale est un arc d'ellipse, qu'on trouve comme il a eté expliqué (Art. CCLXV.). On

aura donc l'intégrale de la différentielle proposée par les rectifications de l'hyperbole & de l'ellipse, & par une quantité algebrique. *C. Q. F. T.*

CCXCII.

COROLLAIRE. En substituant $\frac{bb}{z}$ au lieu de x dans la différentielle $\frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}\sqrt{xx \pm px - bb}}$ on la reduit a celle-cy $\frac{-dz}{z^{\frac{1}{2}}\sqrt{bb \pm pz - zz}}$, qu'on intégre comme la precedente.

CCXCIII.

PROBLEME VI. Trouver l'intégrale de la différentielle $\frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}\sqrt{xx \pm px + bb}}$.

SOLUTION. Les racines de l'equation $xx \pm px + bb = o$ sont $x = \mp \frac{1}{2}p + \sqrt{\frac{1}{4}pp - bb}$ & $x = \mp \frac{1}{2}p - \sqrt{\frac{1}{4}pp - bb}$.

CAS I. Si $\frac{1}{4}pp = bb$, le trinome $xx \pm px + bb$ fera un quarré qui aura $x \pm \frac{1}{2}p$, ou $\frac{1}{2}p \pm x$ pour fa racine, & en faifant $x^{\frac{1}{2}} = z$, la différentielle propofée deviendra rationelle, & pourra s'intégrer par les quadratures des fections coniques.

CAS II. Si $\frac{1}{4}pp < bb$, les racines de l'equation $xx \pm px + bb = o$ feront imaginaires & ce trinome n'aura point de facteurs réels.. Alors pour trouver l'intégrale, on fuppofera $x \pm \frac{1}{2}p = z$, ce qui donnera $x = z \mp \frac{1}{2}p$, $dx = dz$, & $\frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}\sqrt{xx \pm px + bb}} = \frac{dz}{\sqrt{z \mp \frac{1}{2}p}.\sqrt{zz - \frac{1}{4}pp + bb}} = \frac{dz}{\sqrt{z \mp \frac{1}{2}p}.\sqrt{zz + qq}}$, en mettant qq a la place de $bb - \frac{1}{4}pp$; faifant de plus $\sqrt{zz + qq} = y - z$, on aura $z = \frac{yy - qq}{2y}$, $y - z = \frac{yy + qq}{2y} = \sqrt{zz + qq}$, $z \mp \frac{1}{2}p = \frac{yy \mp py - qq}{2y}$, $dz = \frac{dy(yy + qq)}{2yy}$, & $\frac{dz}{\sqrt{z \mp \frac{1}{2}p}.\sqrt{zz + qq}} = \frac{dy\sqrt{z}}{y^{\frac{1}{2}}\sqrt{yy \mp py - qq}}$; diffé-

differentielle, dont l'intégrale se trouve comme dans le Corollaire du Probleme precedent.

CAS III. Si $\frac{1}{4}pp > bb$, les racines de l'equation $xx \pm px + bb = 0$ sont réelles, & en supposant $\sqrt{\frac{1}{4}pp - bb} = b$, on aura $b < \frac{1}{2}p$, & $2b < p$.

Lorsque le trinome sera $xx + px + bb$, les racines seront $x = -\frac{1}{2}p - b$, & $x = -\frac{1}{2}p + b$, les facteurs réels $x + \frac{1}{2}p + b$, & $x + \frac{1}{2}p - b$, & la différentielle $\frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}\sqrt{x+\frac{1}{2}p+b}\cdot\sqrt{x+\frac{1}{2}p-b}}$. En supposant $x + \frac{1}{2}p - b = z$, on aura $dx = dz$, $x = z + b - \frac{1}{2}p$, $x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{z + b - \frac{1}{2}p}$, $\sqrt{x + b + \frac{1}{2}p} = \sqrt{z + 2b}$, $\sqrt{x + \frac{1}{2}p - b} = \sqrt{z}$, & la différentielle deviendra

$$\frac{dz}{z^{\frac{1}{2}}\sqrt{z+2b}\cdot\sqrt{z+b-\frac{1}{2}p}} = \frac{dz}{z^{\frac{1}{2}}\sqrt{zz+z(3b-\frac{1}{2}p)-b(p-2b)}}$$

$= \frac{dz}{z^{\frac{1}{2}}\sqrt{zz \pm rz - cc}}$, en faisant $3b - \frac{1}{2}p = \pm r$, & $b(p - 2b) = cc$, quantité positive, par ce que $p > 2b$. Or l'intégrale de cette différentielle se trouve comme dans le Corollaire du Probleme precedent.

Lorsque le trinome sera $xx - px + bb$, les racines seront $x = \frac{1}{2}p - b$, & $x = \frac{1}{2}p + b$, les facteurs réels du trinome $x + b - \frac{1}{2}p$, & $x - b - \frac{1}{2}p$, & la différentielle $\frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}\sqrt{x + b - \frac{1}{2}p}.\sqrt{x - b - \frac{1}{2}p}}$. En supposant $x + b - \frac{1}{2}p = z$, on aura $dx = dz$, $x = z + \frac{1}{2}p - b$, $x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{z + \frac{1}{2}p - b}$, $\sqrt{x + b - \frac{1}{2}p} = z^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt{x - b - \frac{1}{2}p} = \sqrt{z - 2b}$, & la différentielle

$$\frac{dz}{z^{\frac{1}{2}}\sqrt{z + \frac{1}{2}p - b}.\sqrt{z - 2b}} = \frac{dz}{z^{\frac{1}{2}}\sqrt{zz + z\left(\frac{1}{2}p - 3b\right) - b(p - 2b)}},$$

qui s'intégre comme la precedente. Donc la différentielle proposée $\frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}\sqrt{xx \pm px + bb}}$ se trouve toujours par

les rectifications de l'hyperbole, & de l'ellipse, & par une quantité algebrique, excepté le cas de $b = \frac{1}{2} p$, dans lequel on la trouve par les quadratures des sections coniques. *C. Q. F. T.*

CCXCIV.

PROBLEME VII. Trouver l'intégrale de la différentielle $\frac{dx}{x^{\frac{1}{2}} \sqrt{px - xx - bb}}$.

SOLUTION. Puisque $px - xx - bb = \frac{1}{4} pp - bb - \left(\frac{1}{4} pp - px + xx\right)$, lorsque $\frac{1}{4} pp$ ne sera pas plus grand que bb, le trinome $px - xx - bb$ sera negatif, & sa racine imaginaire, aussi bien que la différentielle proposée. Il faut donc supposer $\frac{1}{2} p > b$, ou $p > 2b$. Dans cette supposition le trinome aura pour ses facteurs réels $x - \frac{1}{2} p + \sqrt{\frac{1}{4} pp - bb}$, & $-x + \frac{1}{2} p + \sqrt{\frac{1}{4} pp - bb}$, ou $x - \frac{1}{2} p + b$, & $-x + \frac{1}{2} p + b$, en mettant b au lieu de $\sqrt{\frac{1}{4} pp - bb}$. Donc la diffé-

rentielle $\frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}\sqrt{px-xx-bb}} = \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}\sqrt{x-\frac{1}{2}p+b}.\sqrt{\frac{1}{2}p+b-x}}$.

Suppofant maintenant $\frac{1}{2}p+b-x=z$, on aura $dx= -dz$, $x=\frac{1}{2}p+b-z$, $x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{1}{2}p+b-z}$, $\sqrt{x-\frac{1}{2}p+b}=\sqrt{2b-z}$, & la différentielle propofée $= \frac{-dz}{z^{\frac{1}{2}}\sqrt{2b-z}.\sqrt{\frac{1}{2}p+b-z}} =$

$\frac{-dz}{z^{\frac{1}{2}}\sqrt{pb+2bb-z(3b+\frac{1}{2}p)+zz}}$, qui s'intégre, comme celle du probleme precedent, c'eft a dire par les rectifications de l'hyperbole, & de l'ellipfe, & par une quantité algebrique, excepté le cas ou elle depend des quadratures des fections coniques. *C. Q. F. T.*

CCXCV.

PROBLEME VIII. Trouver l'intégrale de la différentielle $\frac{x^{\frac{1}{2}}dx}{\sqrt{xx\pm px+bb}}$.

SOLUTION. Puifque le trinome $xx\pm px+bb$ eft le même que celui de l'avant-dernier Probleme,

il aura les mêmes facteurs $x \pm \frac{1}{2}p - b$, & $x \pm \frac{1}{2}p + b$, en suppoſant $b = \sqrt{\frac{1}{4}pp - bb}$, & on aura les mêmes cas.

CAS I. Si $\frac{1}{4}pp = bb$, le trinome ſera un quarré, &, en faiſant $x^{\frac{1}{2}} = z$, la différentielle propoſée deviendra rationelle, & pourra s'intégrer par les quadratures des ſections coniques.

CAS II. Si $\frac{1}{4}pp < bb$, les facteurs du trinome ſeront imaginaires, & on ſuppoſera, comme dans le ſecond Cas de l'avant-dernier Probleme, $x \pm \frac{1}{2}p = z$, ce qui donnera $dx = dz$, $xx \pm px + bb = zz + bb - \frac{1}{4}pp = zz + qq$, en mettant qq au lieu de $bb - \frac{1}{4}pp$, & $\frac{x^{\frac{1}{2}}dx}{\sqrt{xx \pm px + bb}} = \frac{dz\sqrt{z \mp \frac{1}{2}p}}{\sqrt{zz + qq}} = \frac{zdz \mp \frac{1}{2}pdz}{\sqrt{z \mp \frac{1}{2}p} \cdot \sqrt{zz + qq}}$; ſuppoſant de plus $\sqrt{zz + qq} = y - z$, on trouvera, comme cy-deſſus, $\sqrt{zz + qq} = \frac{yy + qq}{2y}$, & $\sqrt{z \mp \frac{1}{2}p} = \frac{\sqrt{yy \mp py - qq}}{\sqrt{2y}}$, & $\frac{dz(z \mp \frac{1}{2}p)}{\sqrt{z \mp \frac{1}{2}p} \cdot \sqrt{zz + qq}} = \frac{dy\sqrt{yy \mp py - qq}}{y\sqrt{2y}}$

$$=\frac{dy(yy\mp py-qq)}{y\sqrt{2y}.\sqrt{yy\mp py-qq}}=\frac{y^{\frac{1}{2}}dy.\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{yy\mp py-qq}}\mp\frac{pdy.\frac{1}{\sqrt{2}}}{y^{\frac{1}{2}}\sqrt{yy\mp py-qq}}$$

$$-\frac{dy.\frac{qq}{\sqrt{2}}}{y\sqrt{y}.\sqrt{yy\mp py-qq}}.$$ Or ces trois différentielles s'intégrent chacune en particulier: la premiere par la rectification de l'hyperbole (Art. CCLX.); la seconde par la rectification de l'hyperbole, & de l'ellipse, & par une quantité algebrique (Art. CCXCI.); & la troisieme par la rectification de l'hyperbole, & par une quantité algebrique (Art. CCLVII., & CCLXIX.).

CAS III. Si $\frac{1}{4}pp > bb$, les facteurs du trinome etant réels, on aura $\frac{x^{\frac{1}{2}}dx}{\sqrt{xx\pm px+bb}}=\frac{x^{\frac{1}{2}}dx}{\sqrt{x\pm\frac{1}{2}p-b}.\sqrt{x\pm\frac{1}{2}p+b}}$. Lorsque le trinome sera $xx+px+bb$, en supposant $x+\frac{1}{2}p-b=z$, on aura $dx=dz$, $x=z+b-\frac{1}{2}p$, $x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{z+b-\frac{1}{2}p}$, $\sqrt{x+\frac{1}{2}p-b}=z^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt{x+\frac{1}{2}p+b}=\sqrt{z+2b}$, & la différentielle

$$\frac{x^{\frac{1}{2}}dx}{\sqrt{x+\frac{1}{2}p-b}.\sqrt{x+\frac{1}{2}p+b}}=\frac{dz\sqrt{z+b-\frac{1}{2}p}}{z^{\frac{1}{2}}\sqrt{z+2b}}=$$

$$\frac{zdz+dz(b-\frac{1}{2}p)}{z^{\frac{1}{2}}\sqrt{z+2b}.\sqrt{z+b-\frac{1}{2}p}}=\frac{z^{\frac{1}{2}}dz}{\sqrt{z+2b}.\sqrt{z+b-\frac{1}{2}p}}+$$

$$\frac{(b-\frac{1}{2}p)dz}{z^{\frac{1}{2}}\sqrt{z+2b}.\sqrt{z+b-\frac{1}{2}p}}=\frac{z^{\frac{1}{2}}dz}{\sqrt{zz+z(3b-\frac{1}{2}p)-b(p-2b)}}$$

$$-\frac{(\frac{1}{2}p-b)dz}{z^{\frac{1}{2}}\sqrt{zz+z(3b-\frac{1}{2}p)-b(p-2b)}}.$$ Or puisque $\sqrt{\frac{1}{4}pp-bb}=b$, & que par conſequent $\frac{1}{2}p>b$, & $p>2b$, le produit $b(p-2b)$ ſera poſitif, & $-b\times(p-2b)$ negatif. Donc les deux dernieres différentielles ſe reduiſent aux formes $\frac{z^{\frac{1}{2}}dz}{\sqrt{zz\pm rz-cc}}$, & $\frac{dz}{z^{\frac{1}{2}}\sqrt{zz\pm rz-cc}}$, dont la premiere s'intégre par la rectification de l'hyperbole (Art. CCLX.), & la ſeconde par les rectifications de l'hyperbole, & de l'ellipſe, & par une quantité algebrique (Art. CCXCII.).

Lorſque le trinome ſera $xx-px+bb$, ou la différentielle $\frac{x^{\frac{1}{2}}dx}{\sqrt{x-\frac{1}{2}p-b}.\sqrt{x-\frac{1}{2}p+b}}$; en ſuppoſant

$x - \frac{1}{2}p + b = z$, on aura $dx = dz$, $x = z + \frac{1}{2}p - b$, $x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{z + \frac{1}{2}p - b}$, $\sqrt{x + \frac{1}{2}p + b} = z^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt{x - \frac{1}{2}p - b} = \sqrt{z - 2b}$, & la différentielle deviendra

$$\frac{dz\sqrt{z + \frac{1}{2}p - b}}{z^{\frac{1}{2}}\sqrt{z - 2b}} = \frac{zdz + \left(\frac{1}{2}p - b\right)dz}{z^{\frac{1}{2}}\sqrt{z - 2b}.\sqrt{z + \frac{1}{2}p - b}} = \frac{z^{\frac{1}{2}}dz}{\sqrt{zz + z\left(\frac{1}{2}p - 3b\right) - b(p - 2b)}} + \frac{\left(\frac{1}{2}p - b\right)dz}{z^{\frac{1}{2}}\sqrt{zz + z\left(\frac{1}{2}p - 3b\right) - b(p - 2b)}}.$$

Or ces deux différentielles sont intégrables, comme les deux dernieres.

Donc la différentielle proposée $\frac{x^{\frac{1}{2}}dx}{\sqrt{xx \pm px + bb}}$ est toujours intégrable par les rectifications de l'hyperbole, & de l'ellipse, & par une quantité algebrique, excepté le cas de $\frac{1}{2}p = b$, dans lequel elle s'intégre par les quadratures des sections coniques. *C. Q. F. T.*

CCXCVI.

CCXCVI.

THEOREME IV. L'intégrale de la différentielle $\frac{x^{\pm\frac{1}{2}}dx}{\sqrt{gx^2+fx+e}}$ ſe trouve toujours par les rectifications de l'hyperbole, ou de l'ellipſe, ou de toutes les deux enſemble & par des quantités algebriques, a moins que le trinome gx^2+fx+e ne ſoit un quarré, & dans ce cas on la trouve par les quadratures des ſections coniques.

DEMONSTRATION. Les trois conſtantes g, f, e ne pouvant être toutes trois negatives, par ce qu'alors $\sqrt{gx^2+fx+e}$, & la différentielle propoſée feroient imaginaires, on ſuppoſera l'une de ces trois conſtantes poſitive.

I.° Si g eſt poſitive $=cc$, on aura $c \times \sqrt{xx+\frac{fx}{cc}+\frac{e}{cc}} = \sqrt{gxx+fx+e}$, & alors en faiſant $\frac{f}{cc} = \pm p$, & $\frac{e}{cc} = \pm bb$, la différentielle ſera $\frac{x^{\pm\frac{1}{2}}dx}{c\sqrt{xx\pm px\pm bb}}$: or nous avons demontré en detail, que cette différentielle eſt toujours intégrable de la maniere enonçée dans ce Theoreme.

II.° Si e eſt poſitive, ou $=bbcc$, la différentielle ſera $\frac{x^{\pm\frac{1}{2}}dx}{\sqrt{gxx+fx+bbc^2}}=\frac{x^{\pm\frac{1}{2}}dx}{c\sqrt{bb\pm px\pm xx}}$, en faiſant $g=\pm cc$, & $f=\pm pcc$, & nous avons demontré que cette différentielle s'intégre, comme il eſt marqué dans l'enonçé du Theoreme.

III.° Si f eſt poſitive, ou $=+pcc$, la différentielle ſera $\frac{x^{\pm\frac{1}{2}}dx}{c\sqrt{px\pm xx\pm bb}}$, en faiſant $g=\pm cc$, & $e=\pm b^2cc$; & nous avons demontré que cette différentielle eſt toujours intégrable, comme dans l'enonçé du Theoreme: donc la différentielle $\frac{x^{\pm\frac{1}{2}}dx}{\sqrt{gxx+fx+e}}$ dans tous les cas poſſibles, peut s'intégrer, comme nous avons dit. *C. Q. F. D.*

CCXCVII.

COROLLAIRE I. Si dans la différentielle $\frac{dz\sqrt{a+bzz}}{\sqrt{f+gzz}}$, on fait $\sqrt{a+bzz}=\sqrt{x}$, ou $a+bzz=x$, on aura $zz=\frac{x-a}{b}$, $z=\frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{b}}$, $dz=\frac{dx}{2\sqrt{x-a}.\sqrt{b}}$, & par

consequent $dz\sqrt{a+bzz} = \frac{dx\sqrt{x}}{2\sqrt{x-a}.\sqrt{b}}$. De plus $\sqrt{f+gzz} = \frac{\sqrt{bf+gx-ga}}{\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{cc+gx}}{\sqrt{b}}$, en faisant $bf-ag=cc$: donc $\frac{dz\sqrt{a+bzz}}{\sqrt{f+gzz}} = \frac{dx\sqrt{x}}{2\sqrt{x-a}.\sqrt{cc+gx}}$ $= \frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{gx^2+(cc-ag)x-acc}} = \frac{x^{\frac{1}{2}}dx}{\sqrt{gx^2+fx-e}}$, en faisant $f=cc-ag$, & $acc=e$, laquelle différentielle n'est qu'un cas particulier de la precedente. Donc la différentielle $\frac{dz\sqrt{a+bzz}}{\sqrt{f+gzz}}$ est intégrable par des arcs d'ellipse, & d'hyperbole, quelques soient les coefficiens a, b, f, g, excepté le cas dans lequel cette différentielle se rapporte a la quadrature des sections coniques.

CCXCVIII.

COROLLAIRE II. Si dans la différentielle $\frac{dz\sqrt{a+bzz}}{zz\sqrt{f+gzz}}$ on fait $z=\frac{1}{x}$, elle se change en celle-cy $\frac{-dx\sqrt{axx+b}}{\sqrt{fxx+g}}$, qui a la même forme que la precedente, & qui par consequent est intégrable de la même maniere. On reduira aussi a la même forme les differentielles $\frac{dz}{zz\sqrt{a+bzz}.\sqrt{f+gzz}}$, & $\frac{dz}{\sqrt{a+bzz}.\sqrt{f+gzz}}$;

la premiere en faiſant $x = \frac{\sqrt{a+bzz}}{z}$ devient $\frac{-\frac{dx}{a}\sqrt{xx-b}}{\sqrt{fxx-bf+ag}}$

& la ſeconde, en ſuppoſant $x = \frac{\sqrt{f+gz^2}}{\sqrt{a+bz^2}}$ ſe change en ces deux autres $\left(\frac{a}{ag-bf}\right) \cdot \frac{dx\sqrt{g-bxx}}{\sqrt{axx-f}} + \left(\frac{b}{ag-bf}\right) \times \frac{dx\sqrt{axx-f}}{\sqrt{g-bxx}}$. Donc ces différentielles ſont auſſi intégrables de la même façon: nous n'avons pas repeté le calcul, qui ne peut faire aucune difficulté.

CCXCIX.

COROLLAIRE III. On peut reduire aux formes precedentes toutes les différentielles, qui ſuivent:

1. $\frac{dz\sqrt{a+bz}}{\sqrt{z(f+gz)}}$

2. $\frac{dz\sqrt{a+bz}}{z\sqrt{z(f+gz)}}$

3. $\frac{dz\sqrt{z}}{\sqrt{(a+bz)(f+gz)}}$

4. $\frac{dz}{\sqrt{z(a+bz)(f+gz)}}$

5. $\frac{dz\sqrt{a+bz}}{(f+gz)^{\frac{3}{2}}\sqrt{z}}$

6. $\frac{dz}{z\sqrt{z.(a+bz)(f+gz)}}$

7. $\frac{dz}{(a+bz)^{\frac{3}{2}}\sqrt{z(f+gz)}}$

8. $\frac{dz\sqrt{z}}{(a+bz)^{\frac{3}{2}}\sqrt{f+gz}}$

il ſuffit pour toutes ces reductions de faire $xx = z$, toutes les expreſſions precedentes ſe trouveront changées en d'autres, qui ſeront toutes renfermées dans les cas du dernier Theoreme. Nous omettons les details des ſubſtitutions, qui ſont ſemblables a celles, que nous venons d'expliquer. De plus l'expreſſion différentielle, quoique plus compoſée en apparence,

$\frac{(A+Bz)dz}{\sqrt{(a+bz)(c+ez)(f+gz)}}$ depend des formes de ce Corollaire. Car en ſubſtituant $a+bz=x$, ou $z=\frac{x-a}{b}$, la différentielle precedente ſe change en

$\frac{dx(Ab-Ba+Bx)}{b\sqrt{x(bc+ex-ae)(bf-ag+gx)}}$, c'eſt a dire

$$\frac{Abdx}{b\sqrt{x(bc-ae+ex)(bf-ag+gx)}} -$$

$$\frac{Badx}{b\sqrt{x(bc-ae+ex)(bf-ag+gx)}} +$$

$\frac{Bxdx}{b\sqrt{x(bc-ae+ex)(bf-ag+gx)}}$. Or les deux premieres différentielles ſe rapportent a la forme quatrieme, & la différentielle $\frac{Bxdx}{b\sqrt{x(bc-ae+ex)(bf-ag+gx)}} =$

$\frac{Bdx\sqrt{x}}{b\sqrt{(bc-ae+ex)(bf-ag+gx)}}$ depend de la forme troiſieme. Donc cette différentielle s'intégre par les rectifications des ſections coniques, avec les mêmes conditions, que nous avons demontrées cy-devant.

CCC.

COROLLAIRE IV. On peut ramener aux formes precedentes la différentielle ſuivante $\frac{dx}{\sqrt{a+bx+cxx+ex^3+fx^4}}$; car on peut reſoudre (par le Ch. VI.) le denominateur de cette fraction en deux facteurs trinomes réels. Suppoſons que ces facteurs ſoient $g+2kx+bxx$, & $m+2ex+nxx$, en ſorte qu'on ait a intégrer cette différentielle $\frac{dx}{\sqrt{(g+2kx+bxx)(m+2ex+nxx)}}$. Soit ſuppoſé $m+2ex+nxx=(g+2kx+bxx)y$ afin que la différentielle propoſée devienne $\frac{dx}{(g+2kx+bxx)\sqrt{y}}$. En extrayant la racine de part & d'autre de l'equation precedente, c'eſt a dire, de $m+2ex+nxx=(g+2kx+bxx)y$, ou de $xx+\frac{2e-2ky}{n-by}x=\frac{gy-m}{n-by}$, on aura en ordonnant l'equation $nx-byx+e-ky=$
$\sqrt{gny-nm-gby^2+bmy+e^2-2eky+k^2y^2}=$
$\sqrt{pyy+qy+r}$, en faiſant $p=k^2-gb$, $q=gn+bm-2ek$, $r=e^2-nm$, & en différentiant l'equation $m+2ex+nxx=(q+2kx+bxx)y$, on trouve-

ra $dx(e+nx-ky-byx)=\frac{1}{2}dy\,(g+2kx+bxx)$,

ou $\frac{dx}{g+2kx+bxx}=\frac{\frac{1}{2}dy}{e+nx-ky-byx}$. Or si a la place du denominateur $e+nx-ky-byx$ on substitue sa valeur trouvée $\sqrt{pyy+qy+r}$, l'equation proposée se change en cette autre $\frac{\frac{1}{2}dy}{\sqrt{y(pyy+qy+r)}}$ de la même forme que les différentielles precedentes, & par consequent intégrable de la même maniere.

CCCI.

LEMME IV. Si on suppose $R=e+fx+gx^2$, $s=\theta+\lambda$, $t=s+\lambda$, & $p=\frac{ff-4eg}{f}$, on aura ces deux equations.

I. $x^\theta R^\lambda=\theta e.S.x^{\theta-1}R^{\lambda-1}dx+sf.S.x^\theta R^{\lambda-1}\times dx+tg.S.x^{\theta+1}R^{\lambda-1}dx$.

II. $x^\theta R^\lambda+\frac{2g}{f}x^{\theta+1}R^\lambda=\theta.S.x^{\theta-1}R^\lambda dx+(t+1)\frac{2g}{f}S.x^\theta R^\lambda dx+\lambda p.S.x^\theta R^{\lambda-1}dx$.

Ces equations ne sont que deux cas particuliers des formules generales, que nous avons demontrées (Art.

CCXIII., CCXV.); on peut auſſi s'aſſûrer de leur exactitude, en prenant les différentielles des deux membres de chaque equation, qu'on trouvera egales entr'elles.

CCCII.

COROLLAIRE I. 1.° La premiere equation n'a point lieu, lorſque les trois nombres θ, s, t ſont egaux chacun a zero, ce qui arrive toujours, quand $\theta = o = \lambda$

2.° Lorſque deux de ces trois nombres θ, s, t ſont egaux chacun a zero, deux des intégrales deſignées par S diſparoiſſent dans l'equation, & la troiſieme ſe trouve par la quantité algebrique $x^\theta R^\lambda$.

3.° Lorſqu'il n'y a qu'un de ces trois nombres egal a zero, ſi l'une des deux intégrales, qui reſtent, eſt donnée, on trouvera toujours l'autre par celle qui eſt donnée, & par la quantité algebrique $x^\theta R^\lambda$.

4.° Lorſque les trois nombres θ, s, t ſont réels, deux des intégrales etant données, on trouvera toujours la troiſieme par ces deux données, & par la quantité $x^\theta R^\lambda$.

5.° Enfin pour faire uſage de la premiere equation, il faut remarquer que les expoſans $\theta - 1$, θ, & $\theta + 1$ de la variable x, hors du trinome R, dans les trois intégrales deſignées par S. ſont en proportion arithmetique, dont la différence eſt l'unité, & que l'expo-

l'expofant du trinome R, dans ces mêmes intégrales, eft le même, fçavoir $\lambda - 1$.

CCCIII.

COROLLAIRE II. 1.° Quand on ne veut employer la feconde equation que pour diminuer fucceffivement de l'unité l'expofant λ du trinome R, cette equation devient inutile, fi $ff = 4eg$, par ce qu'alors, p etant zero, le terme $\lambda p. S. x^{\theta} R^{\lambda - 1} dx$, dans lequel feul cet expofant eft diminué de l'unité, difparoit auffi. C'eft la même chofe, quand, p etant une quantité réelle, on a $\lambda = o$; il faudra donc que λ, & p foient réels, pour faire de cette equation l'ufage qu'on vient de dire.

II.° Lorfque λ, & p etant réels, l'un des deux nombres θ, ou $r + 1$ eft zero, on trouvera l'intégrale $S. x^{\theta} R^{\lambda - 1} dx$ par l'autre intégrale, qui refte, & par la quantité algebrique $x^{\theta} R^{\lambda} + \frac{2g}{f} x^{\theta + 1} R^{\lambda}$, & fi ces deux nombres font egaux chacun a zero, cette intégrale fera algebrique.

III.° Lorfque les quantités p, λ, θ, & $r + 1$ font réelles, deux des intégrales etant données, on trouvera toujours la troifieme par ces deux données, & par la quantité algebrique $x^{\theta} R^{\lambda} + \frac{2g}{f} x^{\theta + 1} R^{\lambda}$.

CCCIV.

LEMME V. L'intégrale de la différentielle $x^{\tau \pm \frac{1}{2}} dx (e+fx+gx^2)^{\pi \pm \frac{1}{2}}$ ſe trouve algebriquement, ou par les quadratures des ſections coniques, lorſque le trinome $e+fx+gxx$ eſt un quarré, & que τ, & π ſont des nombres entiers quelconques poſitifs, ou negatifs.

Car en ſuppoſant $\sqrt{e+fx+gxx}=a+bx$, & $x=zz$, on aura $dx=2zdz$; $x^{\tau \pm \frac{1}{2}}=z^{2\tau \pm 1}$, $(e+fx+gxx)^{\pi \pm \frac{1}{2}}=(a+bx)^{2\pi \pm 1}=(a+bzz)^{2\pi \pm 1}$, & $x^{\tau \pm \frac{1}{2}} dx (e+fx+gxx)^{\pi \pm \frac{1}{2}}=2z^{2\tau+1 \pm 1} dz \times (a+bzz)^{2\pi \pm 1}$, différentielle rationelle, qu'on pourra intégrer algebriquement, lorſque l'expoſant $2\tau+1 \pm 1$ de z hors de la parentheſe, & l'expoſant $2\pi \pm 1$ du binome $a+bzz$ ſont des nombres poſitifs, & qu'on intégrera par les quadratures des ſections coniques, lorſque ces expoſans, ou l'un des deux ſeront negatifs, comme nous l'avons demontré (Chap. VI.).

CCCV.

COROLLAIRE. Si dans le trinome $e+fx+gxx$,

on a $ff = 4eg$, ou $f = 2\sqrt{eg}$, il faudra que les quantités e, & g ayent le même ſigne $+$, ou $-$; car ſi elles avoient différens ſignes, le produit eg ſeroit negatif, & f une quantité imaginaire; par conſequent la différentielle propoſée ſeroit auſſi imaginaire, & n'auroit point d'intégrale réelle. Suppoſons premierement, que ces quantités ayent le ſigne $+$, que $e = aa$, & $g = bb$, on aura $eg = aabb$, $\sqrt{eg} = ab$, $f = ab$, & le Trinome $e + fx + gxx = aa + 2abx + bbxx$, quarré dont la racine eſt $a + bx$: donc, dans cette ſuppoſition, la différentielle propoſée ſera intégrable algebriquement, ou par les quadratures des ſections coniques. Suppoſons en ſecond lieu que les quantités e & g ſoient negatives, ou que $e = -aa$, & $g = -bb$, le trinome ſera $-aa + 2abx - bbxx$, quarré negatif du binome $a - bx$, ou de $bx - a$, d'ou il ſuit que $\sqrt{e + fx + gxx}$ eſt une quantité imaginaire, & que la différentielle propoſée, qui renferme cette racine, eſt auſſi imaginaire. Donc, lorſque cette différentielle eſt réelle, & que $ff = 4eg$, le trinome $e + fx + gxx$ ſera un quarré poſitif, & la différentielle intégrale algebriquement, ou par les quadratures des ſections coniques.

CCCVI.

THEOREME V. L'intégrale de la différentielle $x^{\tau \pm \frac{1}{2}} dx (e + fx + gxx)^{-\frac{1}{2}}$, dans laquelle τ est un nombre entier quelconque positif, ou negatif, peut toujours se trouver par les deux intégrales données $S. x^{-\frac{1}{2}} dx (e + fx + gxx)^{-\frac{1}{2}}$, & $S. x^{\frac{1}{2}} dx (e + fx + gxx)^{-\frac{1}{2}}$.

DEMONSTRATION. I.° R etant toujours supposé $= e + fx + gxx$, soit une suite de différentielles $x^{-\frac{1}{2}} R^{-\frac{1}{2}} dx$, $x^{\frac{1}{2}} R^{-\frac{1}{2}} dx$, $x^{1+\frac{1}{2}} R^{-\frac{1}{2}} dx$, $x^{2+\frac{1}{2}} R^{-\frac{1}{2}} dx$, &c., dans laquelle les exposans de x, hors du trinome R, font une progression arithmetique croissante de l'unité. Il est evident qu'en prenant trois différentielles contigues dans cette suite, on pourra toujours les placer dans la premiere equation du Lemme IV., au lieu des différentielles $x^{\theta - 1} R^{\lambda - 1} dx$, $x^{\theta} R^{\lambda - 1} dx$, $x^{\theta + 1} \times R^{\lambda - 1} dx$, en faisant $\lambda - 1 = -\frac{1}{2}$, ou $\lambda = \frac{1}{2}$ & $\theta - 1$ egal au plus petit exposant de x hors du trinome R dans ces différentielles. Donc, si l'on prend les trois diffé-

rentielles contigües $x^{-\frac{1}{2}}R^{-\frac{1}{2}}dx$, $x^{\frac{1}{2}}R^{-\frac{1}{2}}dx$, $x^{1+\frac{1}{2}}R^{-\frac{1}{2}}dx$, on aura $\theta - 1 = -\frac{1}{2}$, $\theta = \frac{1}{2}$, & comme on a auſſi $\lambda = \frac{1}{2}$, on aura $s = \theta + \lambda = 1$, & $t = s + \lambda = \frac{3}{2}$. En ſubſtituant ces valeurs dans la premiere equation $x^{\theta}R^{\lambda} = \theta e.S.x^{\theta-1}R^{\lambda-1}dx + sf.S.x^{\theta}R^{\lambda-1}dx + tg. \times S.x^{\theta+1}R^{\lambda-1}dx$, elle devient $x^{\frac{1}{2}}R^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}e.S.x^{-\frac{1}{2}}R^{-\frac{1}{2}} \times dx + f.S.x^{\frac{1}{2}}R^{-\frac{1}{2}}dx + \frac{3}{2}g.S.x^{1+\frac{1}{2}}R^{-\frac{1}{2}}dx$; equation, par laquelle les deux intégrales $S.x^{-\frac{1}{2}}R^{-\frac{1}{2}}dx$, & $S.x^{\frac{1}{2}} \times R^{-\frac{1}{2}}dx$ etant données, on trouve la troiſieme intégrale $S.x^{1+\frac{1}{2}}R^{-\frac{1}{2}}dx$. De même, ſi on prend les trois différentielles contigües $x^{\frac{1}{2}}R^{-\frac{1}{2}}dx$, $x^{1+\frac{1}{2}}R^{-\frac{1}{2}}dx$, & $x^{2+\frac{1}{2}} \times R^{-\frac{1}{2}}dx$, on aura $\theta - 1 = \frac{1}{2}$, $\theta = \frac{3}{2}$, $s = \theta + \lambda = 2$, $t = s + \lambda = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$, & en ſubſtituant ces valeurs dans la premiere equation du Lemme IV., on trouve la troiſieme intégrale $S.x^{2+\frac{1}{2}}R^{-\frac{1}{2}}dx$ par les deux autres,

& ainsi de suite a l'infini. Car si on prend en general trois différentielles contigües $x^{\tau \pm \frac{1}{2}} R^{-\frac{1}{2}} dx, x^{\tau + 1 \pm \frac{1}{2}} \times R^{-\frac{1}{2}} dx$, & $x^{\tau + 2 \pm \frac{1}{2}} R^{-\frac{1}{2}} dx$, on aura $\theta - 1 = \tau \pm \frac{1}{2}$, $\theta = \tau + 1 \pm \frac{1}{2}, s = \theta + \lambda = \tau + 1 \pm \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$, $t = s + \lambda = \tau + 2 \pm \frac{1}{2}$; & il est evident que, τ etant un nombre entier positif, les trois nombres θ, s, & t seront toujours réels, & que par consequent (Art. CCGII.) la premiere equation aura toujours lieu, pour augmenter successivement de l'unité l'exposant de x hors du trinome R.

2.° C'est la même chose pour diminuer successivement de l'unité cet exposant de x. Car soit une suite de différentielles $x^{\frac{1}{2}} R^{-\frac{1}{2}} dx, x^{-\frac{1}{2}} R^{-\frac{1}{2}} dx, x^{-1-\frac{1}{2}} \times R^{-\frac{1}{2}} dx, x^{-2-\frac{1}{2}} R^{-\frac{1}{2}} dx$, &c., dans laquelle les exposans de x hors du trinome R sont une progression arithmetique decroissante de l'unité. Il est evident, qu'en prenant trois différentielles contigües dans cette suite, on pourra toujours les plaçer dans la premiere equation du Lemme IV. au lieu des trois différentielles $x^{\theta - 1} R^{\lambda - 1} dx, x^{\theta} R^{\lambda - 1} dx, x^{\theta + 1} R^{\lambda - 1} dx$, en fai-

ſant $\lambda-1=-\frac{1}{2}$, ou $\lambda=\frac{1}{2}$, & $\theta-1$ egal au plus petit expoſant de x hors du trinome dans ces différentielles contigües. Donc, ſi on prend les trois différentielles contigües $x^{\frac{1}{2}}R^{-\frac{1}{2}}dx$, $x^{-\frac{1}{2}}R^{-\frac{1}{2}}dx$, $x^{-1-\frac{1}{2}}\times R^{-\frac{1}{2}}dx$, on aura $\theta-1=-1-\frac{1}{2}$, $\theta=-\frac{1}{2}$, $s=\theta+\lambda=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=0$, $t=s+\lambda=\frac{1}{2}$, & en ſubſtituant ces valeurs dans la premiere equation du Lemme IV., elle devient $x^{-\frac{1}{2}}R^{\frac{1}{2}}=-\frac{1}{2}eS.x^{-1-\frac{1}{2}}R^{-\frac{1}{2}}\times dx+0+\frac{1}{2}g.S.x^{\frac{1}{2}}R^{-\frac{1}{2}}dx$, d'ou l'on tire $S.x^{-1-\frac{1}{2}}\times R^{-\frac{1}{2}}dx=\frac{g}{e}.S.x^{\frac{1}{2}}R^{-\frac{1}{2}}dx-\frac{2}{e}x^{-\frac{1}{2}}R^{\frac{1}{2}}$; & ſi l'on prend en general trois différentielles contigües $x^{-\tau-1\pm\frac{1}{2}}R^{-\frac{1}{2}}dx$, $x^{-\tau-2\pm\frac{1}{2}}R^{-\frac{1}{2}}dx$, $x^{-\tau-3\pm\frac{1}{2}}\times R^{-\frac{1}{2}}dx$, on aura $\theta-1=-\tau-3\pm\frac{1}{2}$, $\theta=-\tau-2\pm\frac{1}{2}$, $s=\theta+\lambda=-\tau-2\pm\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$, $t=s+\lambda=-\tau-1\pm\frac{1}{2}$, par ou l'on voit que $-\tau$ etant un nombre entier negatif, les valeurs de θ, de s, & de t

feront toujours réelles, & que par confequent (Art. CCCII.) on trouvera toujours l'intégrale $S. x^{-\tau-3 \pm \frac{1}{2}} \times R^{-\frac{1}{2}} dx$ par les deux autres intégrales, au moyen de la premiere equation du Lemme IV.: donc l'intégrale propofée &c. *C. Q. F. D.*

CCCVII.

Corollaire. On trouvera donc cette intégrale algebriquement, ou par les quadratures des fections coniques, lorfque le trinome R fera un quarré (Art. CCCIV.), & par les rectifications de l'hyperbole, & de l'ellipfe, & par des quantités algebriques dans les autres cas, comme nous avons demontré en examinant la différentielle $\frac{x^{\pm\frac{1}{2}}}{\sqrt{e+fx+gxx}}$.

CCCVIII.

Theoreme VI. L'intégrale de la différentielle $x^{\tau\pm\frac{1}{2}} dx(e+fx+gxx)^{\pi\pm\frac{1}{2}}$ peut toujours fe trouver par les deux intégrales données $S. x^{-\frac{1}{2}} dx(e+fx+gxx)^{-\frac{1}{2}}$, & $S. x^{\frac{1}{2}} dx(e+fx+gxx)^{-\frac{1}{2}}$, lorfque τ eft un nombre entier quelconque, & π un nombre entier pofitif.

DE-

DEMONSTRATION. R etant toujours ſuppoſé $= e + fx + gxx$; les deux intégrales données ſeront $S. x^{-\frac{1}{2}} R^{-\frac{1}{2}} dx$, $S. x^{\frac{1}{2}} R^{-\frac{1}{2}} dx$, & la différentielle propoſée ſera $x^{\tau \pm \frac{1}{2}} R^{\tau \pm \frac{1}{2}} dx$. Or les deux intégrales $S. x^{-\frac{1}{2}} R^{-\frac{1}{2}} dx$, $S. x^{\frac{1}{2}} R^{-\frac{1}{2}} dx$ etant données, on trouve (Art. CCCVI.) l'intégrale $S. x^{\tau \pm \frac{1}{2}} R^{-\frac{1}{2}} dx$, & la différentielle $x^{\tau \pm \frac{1}{2}} R^{-\frac{1}{2}} dx$ etant $= \frac{x^{\tau \pm \frac{1}{2}} R dx}{R^{\frac{1}{2}}} =$ $\frac{ex^{\tau \pm \frac{1}{2}} dx}{R^{\frac{1}{2}}} + \frac{fx^{\tau \pm \frac{1}{2} + 1} dx}{R^{\frac{1}{2}}} + \frac{gx^{\tau \pm \frac{1}{2} + 2} dx}{R^{\frac{1}{2}}}$, on trouve (Art. CCCVI.) ſeparément les intégrales de chacune de ces trois différentielles: on trouvera donc l'intégrale $S. x^{\tau \pm \frac{1}{2}} R^{\frac{1}{2}} dx$. De même $x^{\tau \pm \frac{1}{2}} R^{\frac{3}{2}} dx = \frac{x^{\tau \pm \frac{1}{2}} R^2 dx}{R^{\frac{1}{2}}}$; & en multipliant $x^{\tau \pm \frac{1}{2}} dx$ par le quarré developpé de R, ou de $e + fx + gxx$, on partagera la différentielle $\frac{x^{\tau \pm \frac{1}{2}} R^2 dx}{R^{\frac{1}{2}}}$, en pluſieurs autres différentielles, dont

chacune pourra s'intégrer séparément par le Theoreme precedent (Art. CCCVI.); & on voit qu'on pourra toujours trouver de la même maniere les intégrales des différentielles $\frac{x^{\tau\pm\frac{1}{2}} R^3 dx}{R^{\frac{1}{2}}}$, $\frac{x^{\tau\pm\frac{1}{2}} R^4 dx}{R^{\frac{1}{2}}}$, $\frac{x^{\tau\pm\frac{1}{2}} R^5 dx}{R^{\frac{1}{2}}}$, &c., qui sont exprimées en general par la différentielle $x^{\tau\pm\frac{1}{2}} R^{\pi\pm\frac{1}{2}} dx$, π etant un nombre positif quelconque: donc &c. *C. Q. F. D.*

CCCIX.

COROLLAIRE. On pourra donc toujours trouver l'intégrale $S. x^{\tau\pm\frac{1}{2}} R^{\pi\pm\frac{1}{2}} dx$ par des quantités algebriques, ou par les quadratures des sections coniques, lorsque le trinome R est un quarré (Art. CCCIV.), & par les rectifications de ces sections, & par des quantités algebriques, lorsque le trinome R ne sera point un quarré (Art. CCCVII.), pourvû que τ soit un nombre entier positif, ou negatif, & π un nombre entier positif.

CCCX.

THEOREME VII. On peut toujours trouver l'intégrale de la différentielle $x^{\tau\pm\frac{1}{2}} R^{\pi\pm\frac{1}{2}} dx$ par les deux

intégrales données $S.x^{-\frac{1}{2}}R^{-\frac{1}{2}}dx$, & $S.x^{\frac{1}{2}}R^{-\frac{1}{2}}dx$, lorsque τ est un nombre entier quelconque, & π un nombre entier negatif.

DEMONSTRATION. I.° En comparant ces trois différentielles $x^{-\frac{1}{2}}R^{-\frac{1}{2}}dx$, $x^{\frac{1}{2}}R^{-\frac{1}{2}}dx$, $x^{\frac{1}{2}}R^{-\frac{3}{2}}dx$ avec les trois différentielles $x^{\theta-1}R^{\lambda}dx$, $x^{\theta}R^{\lambda}dx$, $x^{\theta}R^{\lambda-1}dx$ prises dans la seconde equation du Lemme IV. $x^{\theta}R^{\lambda}+\frac{2g}{f}x^{\theta+1}R^{\lambda}=\theta.S.x^{\theta-1}R^{\lambda}dx+(t+1).\frac{2g}{f}.S.x^{\theta}R^{\lambda}dx+\lambda p.S.x^{\theta}R^{\lambda-1}dx$, que nous designerons par B, on trouve $\theta-1=-\frac{1}{2}$, $\theta=\frac{1}{2}$, $\lambda=-\frac{1}{2}$, $\lambda-1=-\frac{3}{2}$, $s=\theta+\lambda=o$, $t=s+\lambda=-\frac{1}{2}$, $t+1=\frac{1}{2}$; & ces valeurs etant substituées dans l'equation B, elle devient $x^{\frac{1}{2}}R^{-\frac{1}{2}}+\frac{2g}{f}x^{\frac{3}{2}}R^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}.\times S.x^{-\frac{1}{2}}R^{-\frac{1}{2}}dx+\frac{g}{f}.S.x^{\frac{1}{2}}R^{-\frac{1}{2}}dx-\frac{1}{2}p.S.x^{\frac{1}{2}}R^{-\frac{3}{2}}dx$; d'ou l'on tire l'intégrale $S.x^{\frac{1}{2}}R^{-\frac{3}{2}}dx=\frac{1}{p}.S.x^{-\frac{1}{2}}\times$

$R^{-\frac{1}{2}}dx + \frac{2g}{fp}.S.x^{\frac{1}{2}}R^{-\frac{1}{2}}dx - \frac{2}{p}x^{\frac{1}{2}}R^{-\frac{1}{2}} - \frac{4g}{fp}x^{\frac{3}{2}}R^{-\frac{1}{2}}$, p etant $= \frac{ff - 4eg}{f}$, & en comparant de même ces trois diférentielles $x^{-\frac{3}{2}}R^{-\frac{1}{2}}dx$, $x^{-\frac{1}{2}}R^{-\frac{1}{2}}dx$, $x^{-\frac{1}{2}}R^{-\frac{3}{2}} \times dx$, avec les trois $x^{\theta-1}R^{\lambda}dx$, $x^{\theta}R^{\lambda}dx$, $x^{\theta}R^{\lambda-1}dx$ prises dans l'equation B, on trouve $\theta - 1 = -\frac{3}{2}$, $\theta = -\frac{1}{2}$, $\lambda = -\frac{1}{2}$, $s = \theta + \lambda = -1$, $t = s + \lambda = -\frac{3}{2}$, $t + 1 = -\frac{1}{2}$, on trouvera donc (Art. CCCIII.) par l'equation B l'intégrale $S.x^{-\frac{1}{2}}R^{-\frac{3}{2}}dx$, en supposant les deux intégrales $S.x^{-\frac{3}{2}}R^{-\frac{1}{2}}dx$, & $S.x^{-\frac{1}{2}}R^{-\frac{1}{2}}dx$ données: on aura donc les deux intégrales $S.x^{-\frac{1}{2}} \times R^{-\frac{3}{2}}dx$, & $S.x^{\frac{1}{2}}R^{-\frac{3}{2}}dx$.

II.° En comparant ces trois différentielles $x^{-\frac{1}{2}} \times R^{-\frac{3}{2}}dx$, $x^{\frac{1}{2}}R^{-\frac{3}{2}}dx$, $x^{\frac{1}{2}}R^{-\frac{5}{2}}dx$ avec les trois de l'equation B, $x^{\theta-1}R^{\lambda}dx$, $x^{\theta}R^{\lambda}dx$, $x^{\theta}R^{\lambda-1}dx$, on trouve $\theta - 1 = -\frac{1}{2}$, $\theta = \frac{1}{2}$, $\lambda = -\frac{3}{2}$, $\lambda - 1 = -\frac{5}{2}$,

$s = \theta + \lambda = -1$, $t = s + \lambda = -\frac{5}{2}$, $t + 1 = -\frac{3}{2}$; donc on trouvera (Art. CCCIII.) l'intégrale $S.\, x^{\frac{1}{2}} R^{-\frac{5}{2}} dx$ par l'equation B, & de même en comparant ces trois différentielles $x^{-\frac{3}{2}} R^{-\frac{3}{2}} dx$, $x^{-\frac{1}{2}} R^{-\frac{3}{2}} dx$, $x^{-\frac{1}{2}} R^{-\frac{5}{2}} dx$ avec les trois $x^{\theta - 1} R^{\lambda} dx$, $x^{\theta} R^{\lambda} dx$, $x^{\theta} R^{\lambda - 1} dx$ prises dans l'equation B, on trouve $\theta - 1 = -\frac{3}{2}$, $\theta = -\frac{1}{2}$, $\lambda = -\frac{3}{2}$, $s = -2$, $t = -\frac{7}{2}$, $t + 1 = -\frac{5}{2}$: on trouvera donc (Art. CCCIII.) par l'equation B l'intégrale $S.\, x^{-\frac{1}{2}} R^{-\frac{5}{2}} dx$. Donc on aura les deux intégrales $S.\, x^{-\frac{1}{2}} R^{-\frac{5}{2}} dx$, & $S.\, x^{\frac{1}{2}} R^{-\frac{5}{2}} dx$, en suppofant données les deux intégrales $S.\, x^{-\frac{1}{2}} R^{-\frac{1}{2}} dx$, & $S.\, x^{\frac{1}{2}} R^{-\frac{1}{2}} dx$.

III.° On trouvera de la même maniere par les deux intégrales $S.\, x^{-\frac{1}{2}} R^{-\frac{5}{2}} dx$, & $S.\, x^{\frac{1}{2}} R^{-\frac{5}{2}} dx$ ces deux autres $S.\, x^{-\frac{1}{2}} R^{-\frac{7}{2}} dx$, & $S.\, x^{\frac{1}{2}} R^{-\frac{7}{2}} dx$; & au moien de celles–cy les deux autres $S.\, x^{-\frac{1}{2}} R^{-\frac{9}{2}} dx$, & $S.\, x^{\frac{1}{2}} \times R^{-\frac{9}{2}} dx$, & ainfi de fuite a l'infini en diminuant tou-

jours de l'unité l'expoſant de R. Car en general, ſi l'on a les deux intégrales $S.\,x^{-\frac{1}{2}}R^{-\pi-\frac{1}{2}}dx$, & $S.\,x^{\frac{1}{2}}\times R^{-\pi-\frac{1}{2}}dx$, en comparant ces trois différentielles $x^{-\frac{1}{2}}\times R^{-\pi-\frac{1}{2}}dx$, $x^{\frac{1}{2}}R^{-\pi-\frac{1}{2}}dx$, $x^{\frac{1}{2}}R^{-\pi-1-\frac{1}{2}}dx$ avec les trois de l'equation B, $x^{\theta-1}R^{\lambda}dx$, $x^{\theta}R^{\lambda}dx$, & $x^{\theta}R^{\lambda-1}dx$, on trouve $\theta-1=-\frac{1}{2}$, $\theta=\frac{1}{2}$, $\lambda=-\pi-\frac{1}{2}$, $s=\theta+\lambda=-\pi$, $t=s+\lambda=-2\pi-\frac{1}{2}$, $t+1=-2\pi+\frac{1}{2}$, par ou l'on voit qui les nombres θ & λ ſont toujours réels, ce qui ſuffit (Art. CCCIII.), en ſuppoſant anſſi que p ſoit réel, pour trouver par l'equation B l'intégrale $S.\,x^{\frac{1}{2}}R^{-\pi-1-\frac{1}{2}}dx$, ou $S.\,x^{\frac{1}{2}}\times R^{-\pi-n-\frac{1}{2}}dx$. Or on peut toujours (Art. CCCVI.) augmenter, ou diminuer ſucceſſivement de l'unité l'expoſant de x hors du trinome R. Donc on pourra toujours trouver l'intégrale $S.\,x^{\tau\pm\frac{1}{2}}R^{\pi\pm\frac{1}{2}}dx$ par les deux intégrales données $S.\,x^{-\frac{1}{2}}R^{-\frac{1}{2}}dx$, & $S.\,x^{\frac{1}{2}}R^{-\frac{1}{2}}dx$, lorſque τ ſera un nombre entier quelconque, & π un nombre entier negatif. *C. Q. F. D.*

CCCXI.

COROLLAIRE I. Donc en reuniſſant les deux derniers Theoremes, l'intégrale de la différentielle $x^{\tau \pm \frac{1}{2}} R^{\pi \pm \frac{1}{2}} dx$ peut toujours ſe trouver par les deux intégrales donées $S.x^{-\frac{1}{2}} R^{-\frac{1}{2}} dx$, & $S.x^{\frac{1}{2}} R^{-\frac{1}{2}} dx$, lorſque τ & π ſont des nombres entiers quelconques, ou zero.

COROLLAIRE II. Donc cette intégrale ſe trouve par des quantités algebriques, ou par les quadratures des ſections coniques, lorſque le trinome R eſt un quarré (Art. CCCIV.), & par les rectifications des ſections coniques, & par des quantités algebriques, lorſque R n'eſt point un quarré, ny le produit d'un quarré par une conſtante.

CCCXII.

REMARQUE. On peut rendre la formule $x^{\tau \pm \frac{1}{2}} \times R^{\pi \pm \frac{1}{2}} dx$ beaucoup plus generale, en y ſubſtituant z^{n}, ou z^{-n} au lieu de x. On peut encore la rendre plus compliquée, en trouvant par les Tables de reductions une valeur rationelle de x, laquelle, etant ſubſtituée dans le trinome R, le rende quarré, & $R^{\frac{1}{2}}$ rationelle;

car, en mettant par tout dans la formule generale de la differentielle cette valeur rationelle de x, on aura une autre formule generale beaucoup plus composée. Mais comme ces calculs sont trop longs, & que d'ailleurs ils n'ont point d'autre difficulté, nous ne pousserons pas plus loin l'usage de la theorie, que nous avons etabli d'aprés les Methodes de Newton, lesquelles, comme il est aisé de le voir, sont beaucoup plus faciles, & plus generales, que celles dont on a coutume de se servir.

Il nous reste a parler d'un Probleme proposé par le celebre Jean Bernoulli: ce Probleme trés-connu parmi les Geometres consiste a reduire une quadrature transcendante quelconque $S.pdx$ a la rectification d'une courbe algebrique, ou de tant de courbes algebriqués, qu'on voudra. Soit p une fonction algebrique quelconque de x, & $S.pdx$ l'aire d'une courbe, dont l'abscisse est x, & l'ordonnée perpendiculaire p; il s'agit de trouver les coordonnées d'une nouvelle courbe, a la rectification de laquelle se rapporte la quadrature $S.pdx$. Soit pour cela X une fonction algebrique de x, & $dX = \theta dx$, θ etant une fonction de x; soit de plus, en differentiant, $d\theta = \varphi dx$, φ etant une fonction de θ, & par consequent de x, ou de X. Enfin soit supposée l'abscisse de la courbe cherchée $= \frac{adX}{dz}$, & l'ordonnée

$\frac{z\,dX}{dz} - X$; on aura, en faiſant dz conſtante, la différentielle de l'abſciſſe $= \frac{a\,ddX}{dz}$, & la différentielle de l'ordonnée $= \frac{z\,ddX}{dz}$; d'ou l'on tire la différentielle de l'arc $= \frac{ddX}{dz}\sqrt{aa + zz}$, dont l'integrale $= \frac{dX}{dz}\sqrt{aa+zz} - S.\ \frac{z\,dX}{\sqrt{aa+zz}} = \frac{\theta\,dx}{dz}\sqrt{aa+zz} - S.\ \frac{z\theta\,dx}{\sqrt{aa+zz}}$, en ſubſtituant $\theta\,dx$ a la place de dX, comme il eſt evident en retournant aux différentielles. Soit maintenant ſuppoſé $S.\frac{z\theta\,dx}{\sqrt{aa+zz}} = S.\,p\,dx$, on aura $\frac{z\theta}{\sqrt{aa+zz}} = p$, & $z = \frac{ap}{\sqrt{\theta\theta - pp}}$, $dz = \frac{a\theta\theta\,dp - ap\theta\,d\theta}{(\theta\theta - pp)^{\frac{3}{2}}} = \frac{aq\theta\theta\,dx - ap\vartheta\varphi\,dx}{(\theta\theta - pp)^{\frac{3}{2}}}$, en faiſant $dp = q\,dx$, q etant une fonction algebrique de x, & en ſubſtituant a la place de dp & $d\theta$ leurs valeurs reſpectives, d'ou l'on tire les coordonnées, c'eſt a dire, l'abſciſſe $\frac{a\,dX}{dz} = \frac{(\vartheta\vartheta - pp)^{\frac{3}{2}}}{q\theta - p\varphi}$, & l'ordonnée $\frac{z\,dX}{dz} - X = \frac{p\theta\vartheta - p^3}{q\theta - p\varphi} - X$, & par conſequent l'arc de la courbe deſigné par $A = \frac{dX}{dz}\sqrt{aa+zz} - S.\ \frac{z\,dX}{\sqrt{aa+zz}} = \frac{\theta^3 - pp\theta}{q\theta - p\varphi}$

$- S.pdx$, ou $S.pdx = \frac{\theta^3 - pp\theta}{q^4 - p\theta} - A + Q$, quantité constante. Mais p, φ, θ font des fonctions de X, & A eft l'arc d'une courbe algebrique ; donc on reduira par ce moyen l'intégrale $S.pdx$ a la rectification de quelque courbe algebrique. De plus puifque les fonctions X, φ, θ font arbitraires, il eft clair que ces courbes algebriques font variables a l'infini.

Nous aurions pû traiter fort au long ces fortes de reductions, & plufieurs autres beaux Problemes, qui y ont rapport, mais cette matiere appartient plus a la Geometrie qu'au Calcul, & n'entre pas dans le plan de nôtre Ouvrage ; c'eft pourquoy nous nous contenterons d'eclaircir ce que nous venons de dire par un Exemple facile.

Soit $pdx = \frac{dx\sqrt{xx - aa}}{x}$, & par confequent $p = \frac{\sqrt{xx - aa}}{x}$, & $dp = \frac{a^2 dx}{x^2\sqrt{xx - aa}}$: fuppofons $X = x$, l'abfciffe $\frac{adX}{dz}$ deviendra $\frac{adx}{dz}$, & l'ordonnée $\frac{zdX}{dz} - X = \frac{zdx}{dz} - x$; donc la différentielle de l'arc $= \frac{ddx}{dz}\sqrt{aa + zz}$, & l'intégrale $= \frac{dx}{dz}\sqrt{aa + zz} - S.\frac{zdx}{\sqrt{aa + zz}}$. En fubftituant 1 a la place de θ, & par confequent $d\theta = 0$, on aura

l'abſciſſe $\frac{adx}{dz} = \frac{dx}{dp}(1-pp)^{\frac{3}{2}}$, & l'ordonnée $= \frac{dx}{dp}(p-p^3)$ $-x$. Enfin ſubſtituant a la place de p, dp leurs valeurs, on trouve l'abſciſſe $= \frac{a}{x}\sqrt{xx-aa}$, & l'ordonnée $=$ $-\frac{aa}{x}$. Donc en nommant l'abſciſſe u, l'ordonnée y, on aura $uu = aa - \frac{a^4}{xx}$, & $y^2 = \frac{a^4}{xx}$; d'ou l'on tire $uu = aa - yy$, equation au cercle, & par conſequent $S.\frac{dx\sqrt{xx-aa}}{x}$ depend de la rectification du cercle.

Au reſte quelqu'elegantes que ſoient les conſtructions par les rectifications des courbes, ou par les quadratures, il eſt certain qu'elles ſont peu utiles dans l'application, & que la voye d'approximation eſt beaucoup plus ſûre & plus facile.



CHAPITRE VIII.

De l'intégration des différentielles de tous les ordres, & de celles, qui sont affectées de signes d'intégration, en supposant qu'il n'y ait qu'une variable dans chaque différentielle.

CCCXIII.

Soit (*Fig.* 11.) AMm une courbe, dont l'abscisse $AP = x$, l'ordonnée perpendiculaire $PM = y$, $Pp = dx$, & $Qm = dy$. Qu'on prolonge l'ordonnée MP en N, de sorte que PN soit toujours proportionelle a la différentielle dy, ou Qm de PM. Si cette différentielle demeure toujours la même, la ligne PN demeurera aussi toujours la même, & alors ANn sera une ligne droite parallele a l'abscisse AP. Mais si la différentielle dy est variable, PN sera aussi variable, & aura sa différentielle Rn proportionelle a la différentielle de Qm, ou de dy, puisque PN est toujours comme dy; ainsi dy sera la premiere différence, ou la différentielle du premier ordre de l'ordonnée y, ddy ou d^2y sera

la feconde différence, ou la différentielle du fecond ordre de la même ordonnée y.

Or on peut raifonner fur la feconde courbe ANn, comme fur la premiere AMm, & fur la feconde différence ddy, comme fur la premiere dy; de forte que, fi la feconde différence ddy eft variable, elle aura fa différentielle $dddy$, ou d^3y, qui fera la troifieme différence de y, ou la différentielle du troifieme ordre de l'ordonnée PM, & ainfi des autres a l'infini. On voit par la, qu'on trouve les différentielles de tous les ordres, comme celle du premier ordre, en allant par les regles generales du calcul différentiel, du premier ordre au fecond, de celui-cy au troifieme, & ainfi fuccéffivement; par confequent on doit auffi defcendre par les regles generales du calcul intégral de la différentielle d'un ordre fuperieur quelconque a fon intégrale, ou a la différentielle de l'ordre inferieur qui precede immediatement, par exemple du 4.ᵉ ordre au 3.ᵉ, du 3.ᵉ au 2.ᵉ, du 2.ᵉ au 1.ᵉʳ, & de celui-cy aux quantités finies.

CCCXIV.

Ayant divifé l'abfciffe AP en petites parties egales, comme Pp, & ayant tiré par les extremités de ces parties des ordonnées PM, pm; fi l'on conçoit que le nombre de ces petites parties egales de l'abfciffe aug-

mente, & que leur longueur diminue a l'infini, chacune de ces parties, comme Pp, lorſqu'elle s'evanouira, ou lorſque les ordonnées PM, & pm tomberont l'une ſur l'autre, deviendra la différentielle de l'abſciſſe AP, qui luy repond; & dans cette ſuppoſition la différentielle dx de l'abſciſſe x ſera toujours la même, ou conſtante, & l'abſciſſe x n'aura point de ſecondes différences, ny aucune autre d'un ordre ſuperieur. Nous prenderons icy pour conſtante la différentielle dx de l'abſciſſe x, nous reſervant a traiter, dans la ſeconde Partie de cet Ouvrage, du Calcul Intégral des différentielles de tous les ordres a pluſieurs variables, & ſans en ſuppoſer aucune conſtante.

CCCXV.

Nous ſuppoſerons donc que l'equation a la courbe AMm eſt $y = X$ fonction de l'abſciſſe x, de ſorte qu'en différentiant de coté, & d'autre on ait $dy = dX = pdx$, p etant encore une fonction de x; & qu'en prenant les ſecondes différences, on ait $ddy = d(pdx) = dpdx$, dx etant conſtante, & par conſequent $pddx = o$; & en ſuppoſant $dp = qdx$, on aura $ddy = qdxdx = qdx^2$; & de même en prenant les troiſiemes différences, on aura $d^3y = rdx^3$, & ainſi de ſuite.

CCCXVI.

PROBLEME. Intégrer l'equation différentielle $d^n y = p\,dx^n$, dans laquelle dx eſt conſtante, p une fonction de x, & n l'expoſant de l'ordre de la différentielle.

SOLUTION. Puiſque dx eſt conſtante, on peut la deſigner par une conſtante c, & exprimer ainſi l'equation $d^n y = c^{n-1} p\,dx$, & en prenant les intégrales de coté, & d'autre par les regles du Calcul Intégral, on aura $d^{n-1} y = c^{n-1}.\ S.p\,dx + Ac^{n-1}$, A etant une conſtante arbitraire, qu'on determinera par les conditions données. Donc en remettant dx au lieu de c, on aura $d^{n-1} y = dx^{n-1}.\ S.p\,dx + A\,dx^{n-1}$; &, par ce que p eſt une fonction de x, on pourra toujours trouver l'intégrale $S.p\,dx$ par quelques unes des methodes, que nous avons données. Suppoſant donc $S.p\,dx = q$ fonction de x, on aura l'equation $d^{n-1} y = q\,dx^{n-1} + A\,dx^{n-1} = c^{n-2} q\,dx + Ac^{n-2}\,dx$, &, en intégrant encore de coté, & d'autre, on aura $d^{n-2} y = c^{n-2}.\ S.q\,dx + Ac^{n-2} x + Bc^{n-2} = dx^{n-2}.\ S.q\,dx + Ax\,dx^{n-2} + B\,dx^{n-2}$; B etant

encore une constante arbitraire, ou determinable par des conditions données. On continuera de même a intégrer jusqu'a ce qu'on soit parvenu a une equation, qui ne contiendra plus de différentielles, & on voit que pour cela il faudra faire autant d'intégrations, qu'il y a d'unités dans l'exposant n de l'ordre. *C. Q. F. T.*

EXEMPLE I. Soit $ddy = ax^m dx^2$; en intégrant de part, & d'autre, on aura $dy = \frac{ax^{m+1}dx}{m+1} + Adx$, & par une seconde intégration $y = \frac{ax^{m+2}}{(m+1)(m+2)} + Ax + B$.

EXEMPLE II. Soit $d^3y = ax^m dx^3 + bx^\pi dx^3$; on aura par la premiere intégration $ddy = \frac{ax^{m+1}dx^2}{m+1} + \frac{bx^{\pi+1}dx^2}{\pi+1} + Adx^2$; par la seconde intégration $dy = \frac{ax^{m+2}dx}{(m+1)(m+2)} + \frac{bx^{\pi+2}dx}{(\pi+1)(\pi+2)} + Axdx + Bdx$; & par la troisieme intégration on trouvera $y = \frac{ax^{m+3}}{(m+1)(m+2)(m+3)} + \frac{bx^{\pi+3}}{(\pi+1)(\pi+2)(\pi+3)} + \frac{Ax^2}{2} + Bx + C$.

CCCXVII.

THEOREME I. p etant tout ce qu'on voudra, si dx est constante, on aura l'intégrale $S.pdx = px -$

S.

$S.xdp = px - \frac{x^2dp}{2dx} + S.\frac{x^2ddp}{2dx} = px - \frac{x^2dp}{2dx} + \frac{x^3ddp}{2.3.dx^2}$
$- S.\frac{x^3d^3p}{2.3.dx^2} = px - \frac{x^2dp}{2dx} + \frac{x^3ddp}{2.3.dx^2} - \frac{x^4d^3p}{2.3.4.dx^3} +$
$S.\frac{x^4d^4p}{2.3.4.dx^3} =$ &c.

On demontre ce Theoreme en prenant la différentielle de part & d'autre dans chaque equation; car on les trouve egales entr'elles. Ainsi dans la premiere equation $S.pdx = px - S.xdp$, on trouve, en prenant les différentielles, $pdx = pdx + xdp - xdp$; dans la seconde equation, $px - S.xdp = px - \frac{x^2dp}{2dx} + S.\frac{x^2ddp}{2dx}$, ou $-S.xdp = -\frac{x^2dp}{2dx} + S.\frac{x^2ddp}{2dx}$; en différentiant de part & d'autre, & supposant dx constante, on trouve $-xdp = -\frac{2xdxdp}{2dx} - \frac{x^2ddp}{2dx} + \frac{x^2ddp}{2dx} = -xdp$, & ainsi des autres.

CCCXVIII.

COROLLAIRE I. Si la serie du Theoreme converge, on aura $S.pdx = px - \frac{x^2dp}{2dx} + \frac{x^3ddp}{2.3.dx^2} - \frac{x^4d^3p}{2.3.4.dx^3} + \frac{x^5d^4p}{2.3.4.5\,dx^4} -$ &c. a l'infini, ce qui donne la serie trouvée par M. Jean Bernoulli dans les Actes de Leipsik l'année 1694.

CCCXIX.

COROLLAIRE II. Lorſque p eſt une fonction de x, on delivre cette ſuite de toute différentielle. Car ſoit $dp = q\,dx$, $dq = r\,dx$, $dr = t\,dx$, &c., on aura $S.p\,dx = px - \frac{x^2 q}{2} + \frac{x^3 r}{2.3} - \frac{x^4 t}{2.3.4} + \&c. = px - S.qx\,dx$ $= px - \frac{x^2 q}{2} + S.\frac{x^2 r\,dx}{2} = px - \frac{x^2 q}{2} + \frac{x^3 r}{2.3} - S.\frac{x^3 t\,dx}{2.3.} =$ &c.

CCCXX.

LEMME. L'intégrale de la différentielle $u\,dz$, ou $S.u\,dz = uz - S.z\,du$. Car la différentielle de uz eſt $u\,dz + z\,du$, par conſequent l'intégrale $uz = S.u\,dz + S.z\,du$, & $uz - S.z\,du = S.u\,dz$.

CCCXXI.

THEOREME II. p etant une variable quelconque, on a les equations ſuivantes.

I. $S.\overline{dx.S.p\,dx} = x.S.p\,dx - S.px\,dx.$

II. $S.\overline{dx.S.\overline{dx.S.p\,dx}} = \frac{x^2 S.p\,dx - 2x\,S.px\,dx + S.px^2\,dx}{2}.$

III. $S.\overline{dx.S.\overline{dx.S.\overline{dx.S.p\,dx}}} =$

$$\frac{x^3.S.p\,dx - 3x^2 S.px\,dx + 3x\,S.px^2\,dx - S.px^3\,dx}{2.3}.$$

$$\text{IV. } S.dx.\overline{S.dx.\overline{S.dx.\overline{S.dx.\overline{S.pdx}}}} =$$

$$\frac{x^4 S.pdx - 4x^3 S.pxdx + 6x^2 S.px^2 dx - 4x S.px^3 dx + S.px^4 dx}{2.\ 3.\ 4.}$$

& generalement si le nombre des $S.dx$, qui précedent $S.pdx$, est n, & que $1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ \ldots\ldots\ n$ designe le produit de tous les nombres de la suite naturelle $1, 2, 3, 4, 5,$ &c. jusqu'au terme n de cette suite inclusivement, on aura l'equation suivante

$$S.\overline{dx \ldots\ldots S.pdx} = x^n S.pdx - \frac{n}{1} x^{n-1} S.pxdx +$$

$$\frac{n.\overline{n-1}}{1.\ 2} x^{n-2} S.px^2 dx -$$

$$\frac{\frac{n.\overline{n-1}.\overline{n-2}}{1.\ 2.\ 3} x^{n-3} S.px^3 dx \ldots\ldots\ldots \pm S.px^n dx}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ \ldots\ldots\ldots\ n}.$$

DEMONSTRATION. On trouve la premiere equation $S.dx.S.pdx = xS.pdx - S.pxdx$ par le Lemme precedent, en supposant $S.pdx = u$, & $x = z$, ce qui donne $pdx = du$, $pxdx = zdu$, $dx = dz$, $dx \times S.pdx = udz$, $uz = xS.pdx$, &, par le Lemme, $S.udz = S.\overline{dx.\ S.pdx} = uz - S.zdu = xS.pdx - S.pxdx$.

On trouve la seconde equation par la premiere, & par le même Lemme. Car puisque $S.\overline{dx.S.pdx} = xS.\ pdx - S.pxdx$, en multipliant de part & d'au-

tre par dx, on aura la différentielle $dx\,S.\overline{dx.S.pdx} = xdxS.pdx - dxS.pxdx$, & en prenant les intégrales, on a $S.\overline{dxS.\overline{dxS.pdx}} = S.\overline{xdxS.pdx} - S.\overline{dxS.pxdx}$.

Or en supposant $S.pdx = u$, & $xdx = dz$ dans l'intégrale $S.\overline{xdxS.pdx}$, on a $pdx = du$, $\frac{1}{2}x^2 = z$, $uz = \frac{1}{2}x^2S.pdx$, $zdu = \frac{1}{2}px^2dx$, $udz = xdxS.pdx$, & $S.udz = S.\overline{xdxS.pdx} = uz - S.zdu = \frac{x^2S.pdx - S.px^2dx}{2}$. En supposant $S.pxdx = u$, & $x = z$ dans l'intégrale $S.\overline{dxS.pxdx}$, on a $pxdx = du$, $dx = dz$, $uz = xS.pxdx$, $zdu = px^2dx$, $udz = dxS.pxdx$, & par le Lemme $S.udz = S.\overline{dxS.pxdx} = uz - S.zdu = xS.pxdx - S.px^2dx = \frac{2xS.pxdx - 2S.px^2dx}{2}$. Donc $S.\overline{xdxS.pdx} - S.\overline{dxS.pxdx} =$

$$\frac{x^2S.pdx - S.px^2dx - 2xS.pxdx + 2S.px^2dx}{2} =$$

$$\frac{x^2S.pdx - 2xS.pxdx + S.px^2dx}{2}.$$

On trouve de même la troisieme equation par la seconde, & par le Lemme, & ensuite la quatrieme par la troisieme & par le Lemme, & ainsi des autres, & en observant la progression des termes, & de leurs coefficients dans chaque equation, on parvient a l'equation generale.

On auroit pû demontrer d'une maniere plus courte chaque equation, en prenant les différentielles des deux membres, qu'on trouve egales entr'elles; mais nous avons jugé a propos de faire voir l'invention même de ce beau Theoreme, qu'on deduit facilement, comme nous allons demontrer, de la derniere proposition du Traité de la quadrature des courbes de Newton.

CCCXXII.

THEOREME III. Soit $ADIC$ une courbe quelconque (*Fig.* 12.) dont l'abscisse $AB = z$, l'ordonnée $BD = y$; soit $AEKC$ une autre courbe, dont l'ordonnée $BE =$ l'aire de la precedente ADB divisée par l'unité; & $AFLC$ une troisieme courbe, dont l'ordonnée $BF =$ l'aire de la seconde divisée par l'unité, & ainsi de suite a l'infini. Supposons que $A, B, C, D, E,$ *&c.* designent les aires des courbes, dont les ordonnées respectives sont y, zy, z^2y, z^3y, *&c.*, & l'abscisse commune soit z. Supposons de plus une abscisse don-

née quelconque $AC = t$, $BC = t - z = x$, & que P, Q, R, S, T, &c. reprefentent les aires des courbes, dont les ordonnées foient y, xy, $x^2 y$, $x^3 y$, &c., & l'abfciffe commune x. Enfin foient toutes ces aires terminées par l'abfciffe donnée AC, & dans l'ordonnée CI donnée de pofition, & prolongée a l'infini, on aura toutes ces aires.

I. $ADIC = A = P$

II. $AEKC = tA - B = Q$

III. $AFLC = \frac{t^2 A - 2tB + C}{2} = \frac{1}{2} R$

IV. $AGMC = \frac{t^3 A - 3t^2 B + 3tC - D}{6} = \frac{1}{6} S$.

V. $AHNC = \frac{t^4 A - 4t^3 B + 6t^2 C - 4tD + E}{24} = \frac{1}{24} T$.

&c.

DEMONSTRATION I.° Pour demontrer ce Theoreme, nous fuppoferons d'abord que les aires des courbes ADB, AEB, AFB, &c. font exprimées par α, β, γ, &c., & que par confequent les ordonnées refpectives BE, BF, BG, &c. font $\frac{\alpha}{1}$, $\frac{\beta}{1}$, $\frac{\gamma}{1}$, &c. par l'enonçé du Theoreme. Cela pofé, fi ε reprefente l'aire d'une courbe quelconque dans la fuite des aires α, β, γ, &c., & que le rang de cette aire ε foit defigné par n, nous demontrerons generalement, que les aires ε & A, B, C,

&c. etant terminées par l'abſciſſe donnée AC, & dans l'ordonnée infinie CI, on aura toujours l'equation

$$\varepsilon = \frac{t^n A - n t^{n-1} B + \frac{n.\overline{n-1}}{2} t^{n-2} C - \frac{n.\overline{n-1}.\overline{n-2}}{2.3} t^{n-3} D + \&c.}{n.\overline{n-1}.\overline{n-2} \ldots \&c.}$$

Il faut obſerver dans cette ſuite que les coefficiens numeriques des termes du numerateur, 1, $-n$, $+\frac{n.\overline{n-1}}{2}$, &c. ſont les mêmes que ceux du binome developpé $\overline{a-b}^n$. De plus nous obſerverons que l'expoſant de la puiſſance de t dans le premier terme eſt n, dans le ſecond $n-1$, dans le troiſieme $n-2$, &c., leſquels expoſans ſont les mêmes, que ceux des puiſſances de a dans le premier terme a du binome $\overline{a-b}^n$. Enfin nous remarquerons, que A, B, C, &c. ſont les facteurs du 1.er, 2.e, 3.e &c. termes reſpectivement, & ainſi de ſuite a l'infini, & que les facteurs $n-1$, $n-2$, &c., qui entrent dans le denominateur decroiſſent ſucceſſivement de l'unité, juſqu'a ce que le nombre de ces facteurs devienne $= n$. Ce qui etant obſervé, il eſt aiſé de demontrer que les aires A, B, C, D, &c. & ε ayant une abſciſſe commune $z = AB$, l'equation des aires ſera toujours

$$\varepsilon = \frac{z^n A - n z^{n-1} B + \frac{n.\overline{n-1}}{2} z^{n-2} C - \frac{n.\overline{n-1}.\overline{n-2}}{2.3} z^{n-3} D + \&c.}{n.\overline{n-1}.\overline{n-2}. \&c.}$$

Car en différentiant & partageant en deux colonnes, on aura

$$\frac{A z^{n-1} dz}{\overline{n-1}.\,\overline{n-2}.\,\&c.}$$

$$-\frac{B.\,\overline{n-1}.\,z^{n-2} dz}{\overline{n-1}.\,\overline{n-2}.\,\&c.}$$

$$+\frac{C.\,\overline{n-1}.\,\frac{n-2}{2}z^{n-3} dz}{\overline{n-1}.\,\overline{n-2}.\,\&c.}$$

$$-\frac{D.\,\overline{n-1}.\,\frac{n-2}{2}.\,\frac{n-3}{3}z^{n-4} dz}{\overline{n-1}.\,\overline{n-2}.\,\&c.}$$

&c.

$$+\frac{z^n dA}{n.\,\overline{n-1}.\,\overline{n-2}.\,\&c.}$$

$$-\frac{n z^{n-1} dB}{n.\,\overline{n-1}.\,\overline{n-2}.\,\&c.}$$

$$+\frac{n.\,\frac{n-1}{2}.\,z^{n-2} dC}{n.\,\overline{n-1}.\,\overline{n-2}.\,\&c.}$$

$$-\frac{n.\,\frac{n-1}{2}.\,\frac{n-2}{3}z^{n-3} dD}{n.\,\overline{n-1}.\,\overline{n-2}.\,\&c.}$$

&c.

Mais $dA = y\,dz$, $dB = yz\,dz = z\,dA$, $dC = yz^2 dz = z^2 dA$, $dD = yz^3 dz = z^3 dA$, &c. (par la ſuppoſition); & ſubſtituant ces valeurs dans les termes de la ſeconde colonne, elle ſe change en celle-cy

$$\frac{z^n dA - n z^n dA + n.\frac{n-1}{2}z^n dA - n.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3}z^n dA + \&c.}{n.\,\overline{n-1}.\,\overline{n-2}.\,\&c.} =$$

$$\frac{z^n dA \times (1 - n + n.\frac{n-1}{2} - n.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3} + \&c.)}{n.\,\overline{n-1}.\,\overline{n-2}.\,\&c.}.$$

Or le dernier facteur $1 - n + n.\frac{n-1}{2} - \&c.$ eſt compo-

ſé

ſé des coefficiens numeriques du binome $\overline{a-b}^n$, qui devient par conſequent egal a zero, & fait ainſi diſparoitre tous les termes. Donc la différentielle de l'equation precedente ne renferme que la premiere colonne

$$\frac{dz \times (z^{n-1}A - \overline{n-1}.\, z^{n-2}B + \overline{n-1}.\, \frac{n-2}{2} z^{n-3}C - \&c.)}{\overline{n-1}.\, \overline{n-2}.\, \&c.}$$

C'eſt pourquoi ſi la premiere de ces ſuites

$$\frac{z^n A - n z^{n-1} B + n.\, \frac{n-1}{2} z^{n-2} C - \&c.}{n.\, \overline{n-1}.\, \overline{n-2}.\, \&c.}$$ repreſente l'aire d'une

courbe, dont l'abſciſſe eſt z, la ſeconde ſuite

$$\frac{dz\,(z^{n-1}A - \overline{n-1}.\, z^{n-2}B + \overline{n-1}.\, \frac{n-2}{2} z^{n-3}C - \&c.)}{\overline{n-1}.\, \overline{n-2}.\, \&c.}$$

Deſignera la différentielle de cette aire, & par conſequent, en la diviſant par dz, on aura l'ordonnée de la courbe dans cette derniere expreſſion, les coefficiens numeriques des termes du numerateur ſont les mêmes que ceux des puiſſances du binome $\overline{a-b}^{n-1}$, & les expoſans des puiſſances de z ſont $n-1$, $n-2$, $n-3$, &c; enfin A, B, C, &c. ſont les facteurs du 1[er], 2[e], 3[e], &c. termes reſpectivement. D'ou il eſt evident que le nombre des termes dans l'expreſſion de l'aire ſurpaſſe d'une unité le nombre des termes dans la forme de l'ordonnée correſpondante, & de plus que le denominateur de la différentielle multiplié par n, eſt egal au denominateur de l'intégrale.

Yyy

Maintenant soit $n = 1$, en sorte que l'aire de la courbe soit $zA - B$; en différentiant on aura $Adz + zdA - dB = Adz + yzdz - yzdz = Adz$; donc l'ordonnée est A, comme nous l'avons demontré; & en faisant successivement $n = 0, 1, 2, 3,$ &c., on aura la suite

$$A.\ zA - B.\ \frac{z^2A - 2zB + C}{2}\ \ \frac{z^3A - 3z^2B + 3zC - D}{6}\ \text{\&c.\&c.}$$

Dans laquelle on voit, qu'en prenant deux termes quelconques contigus, le premier des deux sera l'ordonnée de la courbe, dont l'abscisse est z, le second sera l'aire, ainsi en prenant la différentielle du troisieme terme, & en substituant a la place de dA, dB, dC, leurs valeurs, comme nous avons fait dans le second terme, on trouvera, en divisant par dz, le second terme $zA - B$. Mais $\alpha, \beta, \gamma,$ &c. est une suite d'aires qui ont la même abscisse, & la même relation que les precedentes. La premiere aire α est egale a la premiere A, puisqu'elles ont la même abscisse z, & la même ordonnée y. Donc tous les termes, qui se suivent dans l'une de ces series, sont egaux a tous les termes respectifs de l'autre, chacun a chacun, & par consequent, si on suppose que l'abscisse z devienne $= AC = t$, alors $\alpha, \beta, \gamma,$ &c. deviennent $ADIC, AEKC, AFLC,$ &c., & on aura, en substituant t a la place de z, 1.° $ADIC = A$; 2.° $AEKC = tA - B$, &

ainsi de suite, comme il est enonçé dans le theoreme. *C. Q. F. D.* en premier lieu.

2.° Il faut demontrer que, si $x = t - z$, & $P, Q, R, S,$ &c. une suite d'aires qui ont x pour abscisse commune, & $y, xy, x^2y,$ &c. pour leurs ordonnées respectives; quand les aires $P, Q, R, S,$ &c., ainsi que les aires $A, B, C,$ &c. sont terminées par l'abscisse $AC = t$, & dans l'ordonnée infinie CI, on aura $P = A$, $Q = tA - B$, & generalement, si n designe l'ordre, ou le rang d'une aire quelconque dans la suite des aires $P, Q, R, S,$ &c. cette sera $= t^nA - nt^{n-1}B + n.\frac{n-1}{2}t^{n-2}C -$ &c., qui est la même suite que la precedente, & dans laquelle il ne manque que le denominateur.

La courbe, qui appartient a la suite des aires $P, Q, R, S,$ &c., & dont le rang est exprimé par n, a pour ordonnée x^ny (par supposition). Mais $x = t - z$, & $x^n = \overline{t-z}^n = t^n - nt^{n-1}z + n.\frac{n-1}{2} \times t^{n-2}z^2 -$ &c.: donc $x^ny = t^ny - nt^{n-1}zy + n. \times \frac{n-1}{2}t^{n-2}z^2y -$ &c. Or les ordonnées $y, zy, z^2y,$ &c. appartiennent aux aires $A, B, C,$ &c.: donc t etant une quantité donnée, l'aire qui appartient a l'or-

donnée composée $t^n y - n t^{n-1} zy + n.\frac{n-1}{2} t^{n-2} \times$ $z^2 y$ — &c. deviendra $t^n A - n t^{n-1} B + n.\frac{n-1}{2} t^{n-2} \times$ C — &c.; l'abscisse etant z, & encore lorsque $z = t$. Donc, puisque l'ordonnée $x^n y$ dans chaque point de l'abscisse donnée $AC = t$, est egale a l'ordonnée composée precedente, il s'ensuit que l'aire decrite par l'ordonnée $x^n y$ le long de toute l'abscisse AC est egale a l'aire composée precedente; ainsi en faisant $n = 1$, on aura $t^n A - n t^{n-1} B = t A - B = Q$, & ainsi de suite. *C. Q. F. D.* en second lieu.

CCCXXIII.

Corollaire I. Soit A l'aire d'une courbe $= S.ydz$, & B l'aire d'une autre courbe, dont l'ordonnée $= \frac{S.ydz}{1}$, l'aire de cette seconde courbe sera $S.(dz S.ydz)$, & ainsi de suite, on aura $\overline{S.dz S.dz \ldots\ldots\ldots\ldots S.ydz}$, & en substituant dans les formules precedentes a la place de A, B, C, leurs valeurs respectives, on aura $S.(dz S.(dz S.ydz)) = \frac{zz S.ydz - 2z S.yzdz + S.yzzdz}{2}$. Generalement on aura la suite

$$\frac{z^n S.y\,dz - \frac{n}{1} z^{n-1} S.yz\,dz + \frac{n\,\overline{n-1}}{1\cdot 2} z^{n-2} S.yzz\,dz \ldots\ldots \pm S.yz^n dz}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ \ldots\ldots\ldots\ n.}$$

comme nous avons demontré d'une autre façon.

CCCXXIV.

Corollaire II. On peut reduire par les methodes precedentes la différentielle d'un ordre quelconque telle que $d^n y = a\,dx\,d^{n-1}y + p\,dx^n$ a une equation différentielle du premier ordre, dx etant constante, & p une fonction de x; car en intégrant de coté & d'autre, en supposant dx constante, on aura $d^{n-1}y = a\,dx\,d^{n-2}y + dx^{n-1} S.p\,dx + A\,dx^{n-1}$, A etant une constante, ou zero. En intégrant une seconde fois on trouve $d^{n-2}y = a\,dx\,d^{n-3}y + dx^{n-2} S.(dx\,S.p\,dx) + Ax\,dx^{n-2} + B\,dx^{n-2}$; en intégrant une troisieme fois, on a $d^{n-3}y = a\,dx\,d^{n-4}y + dx^{n-3} S.(dx\,S.(dx\,S.p\,dx)) + \frac{Ax^2\,dx^{n-3}}{2} + Bx\,dx^{n-3} + C\,dx^{n-3}$; & en continuant a intégrer, on parviendra enfin a une equation différentielle du premier ordre. Soit, par exemple, l'equation $dddy = a\,dx\,ddy + p\,dx^3$; on aura par la premiere intégration $ddy = a\,dx\,dy + dx^2 S.p\,dx$, &

par la feconde intégration $dy = aydx + dx S. (dx \times S. pdx) + Axdx$.

CCCXXV.

REMARQUE. Le dernier Theoreme peut être d'un grand ufage dans les différentielles a plufieurs variables, & d'un ordre fuperieur; mais, cette matiere appartenant a la feconde partie de nôtre Ouvrage, nous nous contenterons de rappeller en peu de mots le probleme refolu dans le Chapitre precedent. Ce probleme, qui confifte dans la reduction des quadratures aux rectifications, depend des principes que nous venons d'etablir. Car foit $S. pdx$ l'aire d'une courbe, p etant une fonction algebrique de x. Soit fuppofé $dp = qdx$, q etant auffi une fonction de x; on pourra faire pareillement $dq = rdx$, $dr = tdx$, & ainfi de fuite. Donc, par les demonftrations precedentes $S. pdx = px - S. xdp = px - S. qxdx$; $S. qxdx = \frac{qxx}{1.2} - S. \frac{xxdq}{1.2} = \frac{qxx}{1.2.} - S. \frac{rxxdx}{1.2.}$; $S. \frac{rxxdx}{1.2} = \frac{rx^3}{1.2.3} - S. \frac{x^3 dr}{1.2.3} = \frac{rx^3}{1.2.3} - S. \frac{tx^3 dx}{1.2.3}$, & ainfi de fuite a l'infini, d'ou il eft evident que, par le moyen des fubftitutions, on pourra avoir autant de valeurs qu'on voudra $S. pdx = px - S. qxdx = px - \frac{qxx}{1.2} + S. \frac{rxxdx}{1.2} =$ &c., parmi lesquelles on en choifira

une, par exemple, $S.pdx = px - S.qxdx$, en faisant $\frac{z^{\theta}dz}{\sqrt{aa+zz}} = S.qxdx$, on trouvera, en suivant les operations que nous avons employées dans la solution du Probleme, $S.pdx = A + px - (\frac{\theta^3 - qq\theta xx}{q^3 + rrx - qq\theta x})$. Il est clair qu'on peut multiplier a l'infini le nombre des solutions, en combinant d'une façon quelconque deux, ou plusieurs de ces formules. Ainsi en ôtant la premiere formule $S.pdx = px - S.qxdx$ du double de la seconde $2S.pdx = 2px - qxx + S.rxxdx$, on aura $S.pdx = px - qxx + S.(rxx + qx)dx$, qui sera une nouvelle valeur, dont on pourra faire usage, en faisant $S.\frac{z^{\theta}dz}{\sqrt{aa+zz}} = S.(rxx + qx)dx$.

Nous finirons par l'application de la proposition XI. du Traité des quadratures a la solution de ce même probleme. Soit une suite de courbes A, B, C, D, E, &c., qui ont une abscisse commune x, & qui ayent cette proprieté que l'aire de la courbe A soit proportionelle a l'ordonnée de la courbe B, l'aire de la courbe B proportionelle a l'ordonnée de la courbe C, & ainsi de suite selon l'enonçé du dernier Theoreme, en sorte qu'une courbe quelconque dans la serie soit toujours constructible par celle qui precede immediatement. Soit la premiere courbe A, dont l'ordonnée p fonction de x, en sorte cependant que pdx ne soit pas intégra-

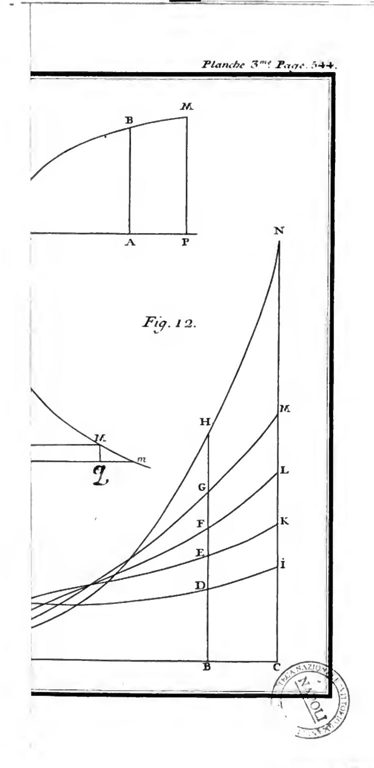
ble; cette quadrature eſt appellée par M. Bernoulli *Tranſcendante du premier degré*, la quadrature de la ſeconde courbe B, *Tranſcendante du ſecond degré*, & ainſi de même ſelon l'ordre des courbes. Or on peut aiſément, par les principes precedents, reduire ces quadratures tranſcendantes a la rectification des courbes algebriques. Car $A = S.pdx$, $B = S.(dxS.pdx)$, $C = S.(dxS.(dxS.pdx))$, &c. Mais $S.(dxS.pdx) = xS.pdx - S.pxdx$, & en general la quadrature tranſcendante d'une courbe du degré $n+1$ ſe reduit a cette forme $S.\overline{dxS.\overline{dxS.\overline{dx\ldots\ldots\ldots S.pdx}}} =$

$$\frac{x^n S.pdx - \frac{n}{1} x^{n-1} S.pxdx + \frac{n.\overline{n-1}}{1.2} x^{n-2} S.pxxdx \ldots\ldots\ldots \pm S.px^n dx}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ldots\ldots\ldots\ldots\ n}.$$

Il ne reſte donc qu'a reduire par les methodes du Chapitre precedent les quadratures $S.pdx$, $S.pxdx$, $S.pxxdx$, &c. a la rectification d'autant de courbes algebriques qu'il y a de termes affectés de S, &, en ſubſtituant dans la ſerie precedente, on aura la quadrature tranſcendante du degré $n+1$ reduite a la rectification d'autant de courbes algebriques qu'il y a d'unités dans $n+1$. *His principiis via ſternitur ad majora.* Newton, Traité des quadratures.

Fin de la premiere Partie.

TABLE



M
B
A
P
N
Fig. 12.
M
H
M
m
L
G
F
K
E
i
D
B
C

TABLE
DES CHAPITRES
Contenûs dans cette Premiere Partie.

Fin de la Table des Chapitres.

1768. 9. Martii.

VIDIT

Schiattini Præses.

A. Mazza Secretarius.



